



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

**MODELAÇÃO E ANÁLISE
DE ESTRUTURAS LAMINARES DE BETÃO:
POSSIBILIDADES E DESAFIOS**

Mário Jorge de Seixas Pimentel

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil,
realizada sob a orientação dos Professores Joaquim Figueiras e Paulo Cachim.

RESUMO

Ainda hoje, na prática corrente de engenharia, não se analisa o comportamento real das estruturas, simulando-se antes estados virtuais de equilíbrio recorrendo à análise linear elástica. Se em estruturas correntes, nomeadamente as estruturas compostas por elementos lineares, a experiência acumulada e o conjunto de disposições regulamentares existentes permite que o processo de dimensionamento seja eficaz e económico, o mesmo não se poderá dizer de outras estruturas cujo comportamento seja menos conhecido, como é o caso das estruturas laminares.

O trabalho apresentado nesta dissertação tem como principais objectivos o estudo, a avaliação e a aplicação de modelos de análise não linear de estruturas de betão na previsão do comportamento, em fase de serviço e em estado limite último, de estruturas de betão com comportamento menos corrente. Para este efeito é efectuada uma revisão do estado do conhecimento referente à mecânica não linear do betão estrutural, quando sujeito a cargas estáticas e de curta duração, e aos modelos constitutivos usualmente empregues para reproduzir este comportamento.

Posteriormente, são apresentados alguns exemplos de aplicação de modelos de análise não linear na reprodução da resposta e do mecanismo de colapso observado em elementos estruturais testados em laboratório. Com estes exemplos prende-se efectuar uma calibração de parâmetros e procedimentos com vista à análise de estruturas reais, assim como discutir o funcionamento de algumas estruturas laminares. Em seguida, é descrita uma aplicação das técnicas de análise não linear a um caso de interesse prático, ilustrando as suas potencialidades no processo de análise e dimensionamento. Os elementos estruturais analisados são as paredes divisórias que sustentam o nível superior de reservatórios da ETAR de Sobreiras.

ABSTRACT

Even today, in engineering current practice, the structural behaviour is not properly analysed. Virtual states of equilibrium are usually considered using linear elastic analyses. In what frame structures are concerned this design procedure provides safe and economic results since it is strongly based on structural concrete design codes recommendations. Simultaneously there is a great amount of experience among the technical community in detailing this kind of structural elements. However this is not the case for plate and shell structures exhibiting a more complex structural behaviour.

The work presented in this thesis aimed the study and application of concrete non-linear finite element analysis (NLFEA) procedures for structural performance assessment either in service or in ultimate state conditions. The state-of-the-art knowledge about concrete mechanical properties under short-term static loads and mild weather conditions is presented in the first part of this thesis. Afterwards several constitutive models usually adopted to model concrete non-linear behaviour are presented and discussed. In order to calibrate and evaluate the numerical models available in a NLFEA software some applications are made and the numerical results obtained are compared with experimental ones. The structural behaviour of the analysed structures is discussed and some insight is gained within the possibilities of NLFEA. Finally a practical case is presented and NLFEA potential is demonstrated in the design process and safety evaluation of a complex pre-stressed concrete structure. The structural elements analysed are the shear beams that support the upper level of a water treatment plant reservoirs.

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles que me acompanharam durante mais esta etapa, e que, através da sua amizade, compreensão e disponibilidade, contribuíram para a realização deste trabalho, expresso aqui o meu reconhecimento. Tenho, no entanto, de referir especialmente:

- o Professor Joaquim Figueiras, meu orientador científico e grande responsável pelo meu interesse no betão estrutural, a quem quero agradecer todos os ensinamentos partilhados, o empenho com que me tem acompanhado, os meios colocados ao meu dispor e o espírito crítico que tentei reflectir nesta dissertação;
- o Professor Paulo Cachim, co-orientador científico deste trabalho, pelas sugestões sempre oportunas e pelo cuidado na revisão da dissertação;
- o Professor Rui Faria pela sua disponibilidade para discutir alguns temas relacionados com este trabalho, pela bibliografia cedida, pela cultura de rigor que inspira e por todo o apoio que sempre me demonstrou;
- os amigos e colegas de trabalho Carlos Sousa, Filipe Magalhães, Miguel Azenha, Miguel Ferraz e Pedro Costa, pelo excelente ambiente de trabalho e de convívio que proporcionam, sem o qual certamente a realização desta dissertação seria muito mais difícil.

Aos meus Pais.

ÍNDICE DO TEXTO

1 - INTRODUÇÃO.....	3
1.1 – Estruturas laminares de betão – Perspectiva actual do processo de análise e dimensionamento	3
1.2 – Objectivos e organização da dissertação	11
2 – MECÂNICA NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL.....	15
2.1 – Introdução.....	15
2.2 – Fractura por tracção do betão simples	16
2.2.1 – A importância da mecânica da fractura.....	16
2.2.2 – Mecânica da fractura elástica linear (LEFM).....	20
2.2.3 – Mecânica da fractura não linear (NLFM)	23
2.2.3.1 – Processo de fractura e comportamento deformacional.....	23
2.2.3.2 - Modelos de NLFM.....	27
2.2.3.3 – Efeito de escala segundo a NLFM	35
2.3 – Transferência de tensões de corte entre fendas	38
2.4 – Fractura por compressão	44
2.4.1 – Processo de fractura em compressão.....	45
2.4.1.1 - Processo de fractura sob um estado de tensão não hidrostático (tensor de desvio não nulo)	45
2.4.1.2 - Influência da componente hidrostática do tensor das tensões no processo de fractura.	48
2.4.2 – Superfície de rotura.	49
2.4.3 – Comportamento deformacional.....	52
2.5 – Aderência armaduras/betão	56
2.6 – Betão armado fendilhado – Um material compósito.....	61
2.6.1 - Retenção de tensões de tracção no betão (“tension stiffening”).....	61
2.6.2 - Redução da resistência à compressão com a fendilhação	67
2.6.3 - Efeito de cavilha (“dowel action”).....	69

3 - MODELAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL..... 75

3.1 – Classificação dos modelos.....	75
3.1.1 – Descrição cinemática.....	75
3.1.2 – Lei constitutiva.....	76
3.1.3 – Técnicas de aproximação numérica.....	77
3.2 – Modelos baseados no conceito de extensão total	81
3.2.1– Formulação geral.....	83
3.2.2 – Modelos para o betão não fendilhado.....	85
3.2.3 – Modelos para o betão fendilhado	88
3.2.3.1 – Modelos de fendas fixas.....	89
3.2.3.2 - Modelos de fendas rotativas.....	95
3.3 – Modelos de fendilhação distribuída com decomposição das extensões	98
3.3.1 – Modelos de fendas fixas	98
3.3.2 – Modelos de múltiplas fendas fixas	104
3.3.3 - Modelos de fendas rotativas.....	107
3.3.4 – Algumas considerações sobre o uso de modelos de fendas distribuídas	108
3.4 – Modelos elasto-plásticos.....	113
3.4.1 – Formulação geral.....	113
3.4.2 – Modelos isotrópicos com endurecimento isotrópico	118
3.4.3 – Endurecimento cinemático e misto	120
3.4.4 – Leis de escoamento associadas e não associadas	121
3.4.5 – Plasticidade com múltiplas superfícies de cedência.....	122
3.4.6 – Modelos elasto-plásticos generalizados	126
3.5 – Modelos de dano.....	127
3.6 – Modelos de microplanos.....	129

4 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE BETÃO COM BASE NO SOFTWARE DIANA..... 135

4.1 – Introdução.....	135
4.1.1 – Modelo “ <i>Multifix</i> ”	135
4.1.2 – Modelos “ <i>Total-Strain</i> ”	143
4.1.3 – Modelo “ <i>Rankine/Drucker-Prager</i> ”	144

4.2 – Aplicações	145
4.2.1 – Análise de vigas com roturas por corte	146
4.2.1.1 – Viga sem estribos	146
4.2.1.2 – Viga com estribos mínimos.....	152
4.2.2 – Análise de uma parede com aberturas.....	157
4.2.2.1 – Formulação do problema.....	157
4.2.2.2 – Análise numérica.....	159
4.2.3 – Análise de vigas parede com apoios indirectos.....	164
4.2.3.1 – Formulação do problema.....	164
4.2.3.2 – Modelo nº1	165
4.2.3.3 – Modelo nº2	169
4.2.3.4 – Modelo nº3	173
4.2.3.5 – Extrapolação para a escala real. Efeito de escala.	177
4.3 – Considerações finais.....	179
 5 - CASO PRÁTICO: ETAR DE SOBREIRAS.....	185
5.1 – Descrição da Estrutura	185
5.2 – Metodologia de análise e verificação de segurança	187
5.3 – Análise não linear 2D – Vigas-parede.....	188
5.3.1 – Viga-parede sem aberturas	188
5.3.2 – Viga-parede com aberturas	195
5.4 – Análise não linear 3D – Região dos apoios.....	200
5.5 – Resultados da instrumentação durante o enchimento.....	208
5.6 – Considerações finais.....	212
 6 – CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	217
6.1 – Sumário e conclusões	217
6.2 - Desenvolvimentos futuros.....	221
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	225

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 - INTRODUÇÃO

1.1 – ESTRUTURAS LAMINARES DE BETÃO – PERSPECTIVA ACTUAL DO PROCESSO DE ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO

As obras de Engenharia Civil correspondem aos investimentos mais significativos das sociedades actuais e, numa óptica de recursos escassos, é dever do engenheiro zelar pela obtenção de soluções simultaneamente seguras e económicas. As consequências de falhas no processo de análise e dimensionamento podem resultar em perdas económicas e sociais, muitas das vezes, inaceitáveis.

Apesar dos avanços conseguidos no domínio da análise estrutural, fruto de grande investimento em recursos humanos e financeiros, ainda hoje, na prática corrente de dimensionamento de estruturas de betão, não se analisa o comportamento real das estruturas, simulando-se antes estados virtuais de equilíbrio recorrendo à análise linear elástica e assumindo um comportamento não fissurado no cálculo dos esforços actuates. Em estruturas estaticamente indeterminadas os esforços assim obtidos afastam-se dos realmente instalados na estrutura de um certo valor residual e auto-equilibrado, caracterizando as forças internas determinadas pela teoria da elasticidade apenas um estado de equilíbrio admissível. Este valor residual não é necessariamente pequeno, podendo ser muito significativo e da ordem de grandeza dos esforços calculados.

Por outro lado, no processo de cálculo das armaduras são utilizadas leis de comportamento não linear para os materiais. Em consequência do uso de duas leis constitutivas distintas, uma para o cálculo dos esforços actuates – lei elástica e linear – e outra para o cálculo orgânico das secções – lei não linear de comportamento do material – os esforços actuates são tomados independentes das secções dimensionadas, não sendo por isso necessário um processo iterativo para a distribuição dos valores residuais. Este procedimento encontra-se largamente estabelecido devido à sua grande simplicidade, permitindo a consideração de várias combinações de acções sem grande dificuldade adicional.

Esta metodologia apresenta, no entanto, inconsistências, não sendo respeitadas as reais condições de compatibilidade de deformações, pelo que as deformações calculadas usando a lei linear nada têm a ver com as reais. Porém, em estruturas correntes, nomeadamente em estruturas

compostas por elementos lineares, a experiência acumulada e o conjunto de disposições regulamentares existentes permite que o processo de dimensionamento seja eficaz e económico. A adopção de elementos com dimensões adequadas e o detalhe adequado das armaduras asseguram a ductilidade necessária para que as estruturas se adaptem a uma larga variedade de solicitações. A necessidade de conhecer o verdadeiro estado de equilíbrio toma assim pouca importância e o uso de análises elásticas, eventualmente ajustadas para ter em conta alguma redistribuição de esforços, é geralmente suficiente, pelo menos no caso da análise estática.

No caso das estruturas laminares, a maior complexidade do seu comportamento, o menor número de disposições regulamentares aplicáveis e a menor formação de base específica que ainda é fornecida ao meio técnico associado ao projecto de estruturas, faz com que este processo de dimensionamento requeira alguma atenção adicional. Admitindo a hipótese de Bernoulli-Navier ao longo da espessura, a integração das tensões actuantes num elemento laminar (*Figura 1.1 a)*) conduz, no caso mais geral, aos oito esforços resultantes representados na *Figura 1.1 b)*.

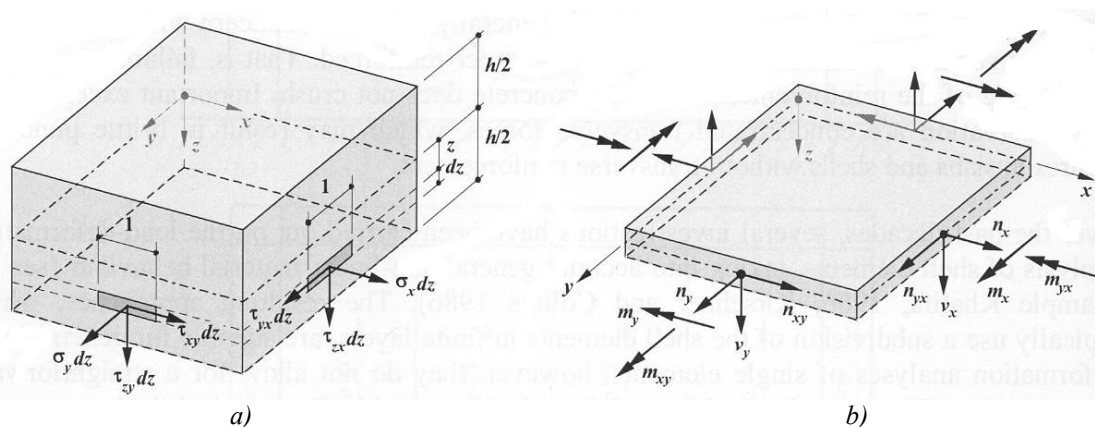


Figura 1.1 – Elemento de casca plano: a) Tensões actuantes. b) Resultantes das tensões actuantes.

Os esforços podem subdividir-se em dois grupos: os esforços de membrana n_x , n_y e n_{xy} , resultantes essencialmente de acções no plano da estrutura; e os esforços que resultam essencialmente de acções perpendiculares ao plano da estrutura, os momentos flectores m_x e m_y , o momento torsor m_{xy} e os esforços de corte v_x e v_y . No caso mais geral de uma estrutura laminar sujeita aos dois grupos de esforços temos uma estrutura tipo casca (*Figura 1.2*). Estruturas planas sujeitas apenas a acções no seu plano desenvolvem apenas esforços de membrana, sendo aqui denominadas de estruturas tipo parede. Estruturas planas sujeitas a acções perpendiculares ao seu plano médio desenvolvem esforços do segundo grupo acima referido, sendo aqui denominadas de lajes. Nas lajes, dada a sua grande ductilidade, os efeitos geometricamente não lineares induzem esforços de membrana que, regra geral, são desprezados no dimensionamento, mas que podem ser responsáveis por um acréscimo sensível da capacidade de carga deste tipo de estruturas.



Figura 1.2 – Exemplo de uma estrutura tipo casca. Construção da cobertura do mercado do Porto de Santander, em Espanha (fib 2004).

Nas estruturas laminares do tipo laje, e focando a atenção nas de geometria mais complexa, o processo de cálculo usualmente adoptado consiste na determinação dos esforços actuantes de acordo com a sua distribuição elástica, sendo corrente o uso do método dos elementos finitos. Garantindo que a rotura ocorre por flexão, este tipo de estruturas é geralmente muito dúctil, pelo que a aplicabilidade dos métodos de análise plástica limite é também corrente, dos quais se realçam o método das linhas de rotura e o método das bandas (Ghali e Neville 1972). O cálculo das armaduras a partir dos resultados da análise elástica baseada no método dos elementos finitos é efectuado usando conceitos de análise plástica limite, tais como o método baseado no critério do momento normal ou o mais sofisticado e genérico modelo das três camadas (fib 2004; Figueiras et al. 1994; Lourenço e Figueiras 1993). Estando garantida a resistência ao corte, nomeadamente ao punçoamento, a ductilidade destes elementos estruturais permite-lhes também uma adaptação a uma larga variedade de solicitações, pelo que o conhecimento do seu real estado de equilíbrio pode ser na maior parte das vezes relaxado.

No caso de estruturas tipo parede, o processo de dimensionamento mais corrente consiste na construção de modelos de escoras e tirantes a partir das trajectórias das tensões principais elásticas, conforme proposto por (Schlaich et al. 1987) (*Figura 1.3*). Os modelos de escoras e tirantes representam um esquema de equilíbrio estaticamente admissível, requerendo apenas a satisfação das condições de equilíbrio e de cedência e, uma vez garantida a ductilidade da estrutura, têm suporte teórico no teorema do limite inferior da teoria da plasticidade (a ductilidade é aqui entendida como a capacidade da estrutura em redistribuir tensões desde o estado de equilíbrio elástico até ao estado de equilíbrio idealizado). O seu uso requer, porém, a sensibilidade estrutural e a experiência necessárias para não forçar em demasia os requisitos de ductilidade, daí o procedimento corrente de usar esquemas de equilíbrio não muito distantes dos que se podem inferir da distribuição elástica de tensões, sendo também boa prática garantir a cedência nas armaduras muito antes do esmagamento do betão. Existe já enquadramento regulamentar para a aplicação deste método nos códigos de prática mais recentes (AASHTO 1994; ACI 2002; CEB 1993; CEN 2002; CSA 1994), sendo, no entanto, ainda significativa a dispersão nos valores da capacidade resistente do betão das escoras. A ductilidade necessária ao

estabelecimento deste tipo de modelos de equilíbrio só é conseguida à custa da disposição de armaduras distribuídas em malha, que muitas vezes não são contabilizadas no modelo de equilíbrio original. Algumas complicações podem surgir quando o esquema de equilíbrio é estaticamente indeterminado, existindo várias propostas para procedimentos conducentes ao levantamento da indeterminação, tais como a minimização da energia de deformação associada aos campos de tensões das escoras e dos tirantes, entre outros (fib 2004). Convém, no entanto, não perder de vista que uma das grandes vantagens do método reside na sua simplicidade conceptual, e no auxílio que prestam à interpretação do funcionamento estrutural de estruturas laminares ou regiões de descontinuidade estática e/ou geométrica. Uma revisão completa de vários aspectos relacionados com o uso de modelos de escoras e tirantes pode ser encontrada em (fib 2004).

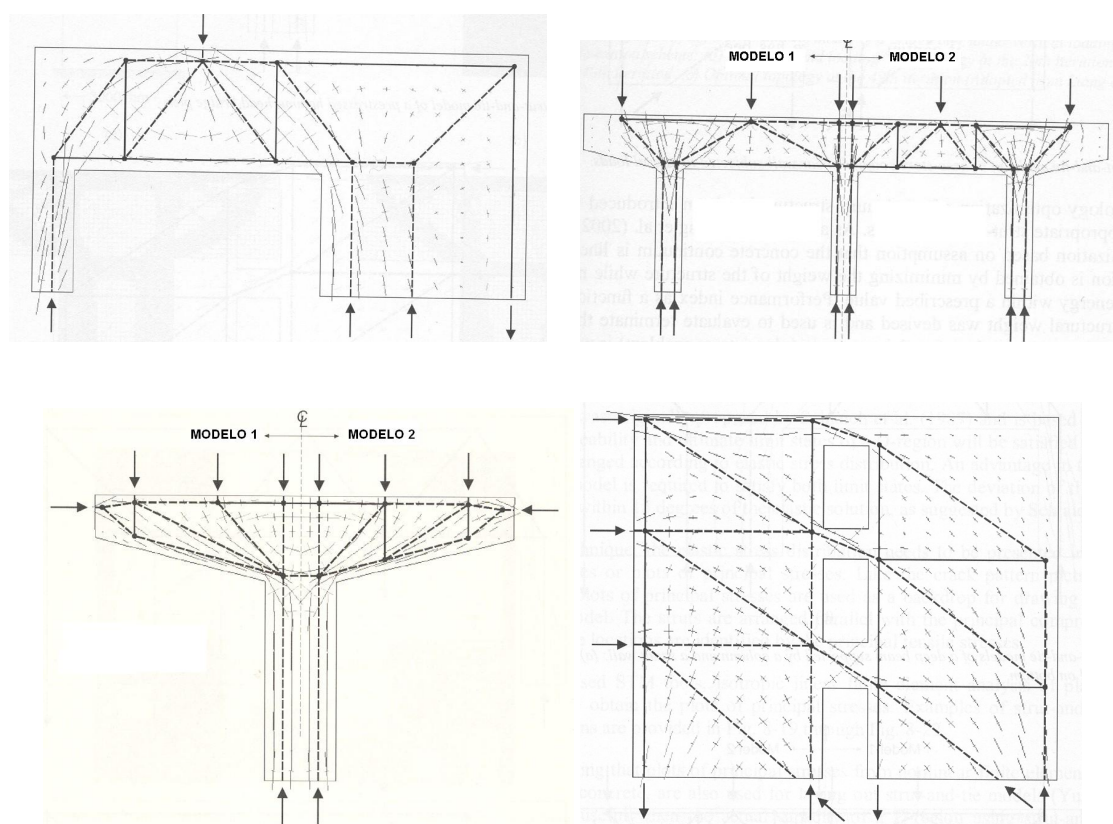


Figura 1.3 – Exemplos de modelos de escoras e tirantes construídos a partir das trajetórias de tensões elásticas (fib 2004).

Outra forma de proceder ao dimensionamento das armaduras consiste em efectuar o seu cálculo directamente a partir das tensões elásticas determinadas através de uma análise pelo método dos elementos finitos. A quantidade de armadura é calculada de acordo com procedimentos baseados em conceitos de análise plástica limite (fib 1999b; fib 2004; Kaufmann e Marti 1998; Lourenço e Figueiras 1993), devendo a capacidade resistente do betão comprimido ser tomada com valores conservativos. Este método é de aplicação bastante eficiente no caso de geometrias e condições de carregamento complexas, onde por vezes a construção de modelos de escoras e

tirantes é morosa, encontrando-se também contemplado na regulamentação europeia mais recente (CEN 2002). Por outro lado, a consideração de várias combinações de acções não é problemática, ao contrário do que acontece com os modelos de escoras e tirantes, onde cada combinação pode requerer um novo modelo. Exemplos de aplicação desta metodologia podem ser encontradas em (fib 2004; Pimentel e Miranda 2001). Na *Figura 1.4* está ilustrada uma aplicação do método. A materialização armadura é efectuada através do cálculo da área definida pelo diagrama da *Figura 1.4 b)*, dispondo-a aproximadamente ao longo da altura por ele definida e tendo em atenção o comprimento necessário à sua amarração.

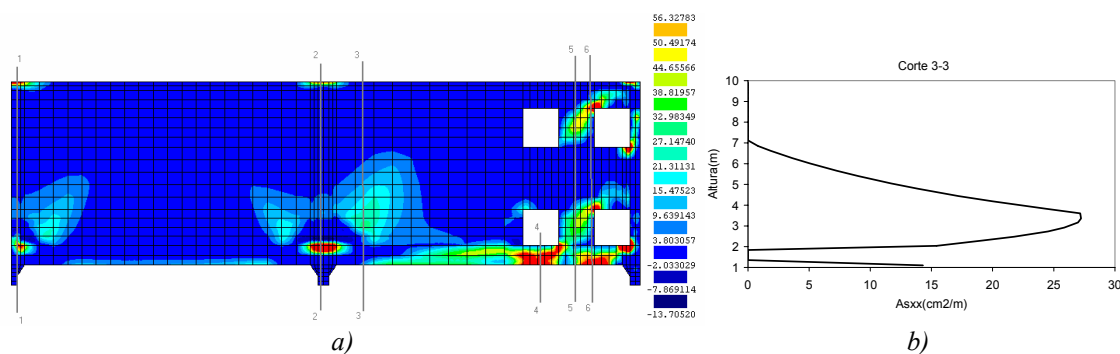


Figura 1.4 – Cálculo das armaduras com base nos resultados do método dos elementos finitos: a) Mapa com as densidades de armadura horizontais (cm²/m). b) Corte com a variação da densidade de armadura ao longo da altura.

Na Delft University of Technology, na Holanda, está a ser desenvolvido um novo método para o dimensionamento de estruturas tipo parede, e que pode ser usado tanto para verificações aos estados limites de serviço assim como aos estados limites últimos. No chamado *Método da Corda-Painel* (“*Stringer-Panel Method*”) a estrutura é modelada através de um conjunto de cordas e painéis (*Figura 1.5*), e baseia-se na constatação de que as armaduras principais neste tipo de elementos estruturais estão, na maior parte das vezes, concentradas e dispostas ao longo de alinhamentos rectos, representados pelas cordas, e a armadura distribuída está disseminada sobre áreas consideráveis, representadas pelos painéis. As cordas resistem aos esforços normais e os painéis essencialmente a esforços de corte. A interação entre as cordas e os painéis resulta numa tensão constante na interface, originando uma distribuição triangular de forças nas cordas. As leis constitutivas das cordas incluem o efeito da retenção de tensões de tracção no betão e para os painéis foi adoptada a versão modificada da teoria do campo de compressões (“*Modified Compression Field Theory*”) proposta por (Vecchio e Collins 1986). Detalhes sobre o método podem ser encontrados em (fib 2004) e em <http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/spancad/>.

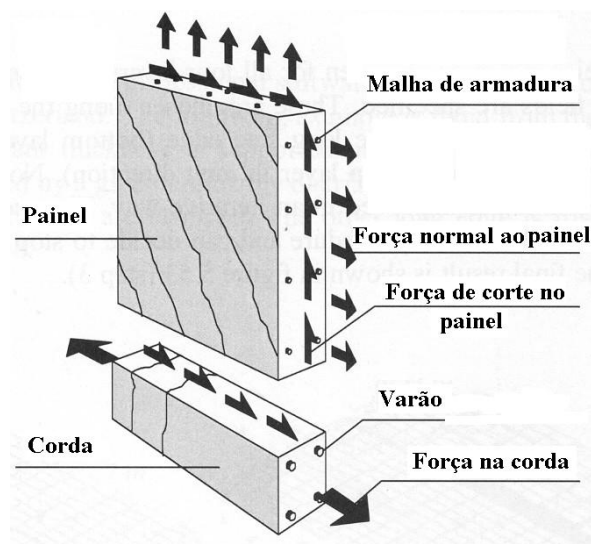


Figura 1.5 – Elemento de corda-painel (fib 2004).

Nas cascas, o dimensionamento das armaduras pode ser efectuado a partir das tensões elásticas determinadas pelo método dos elementos finitos através da generalização dos métodos já referidos para as lajes e para as paredes (Lourenço e Figueiras 1993) (Figura 1.6). Exemplos de aplicação desta metodologia podem ser encontrados em (fib 1999c; fib 2004; Figueiras et al. 1994).

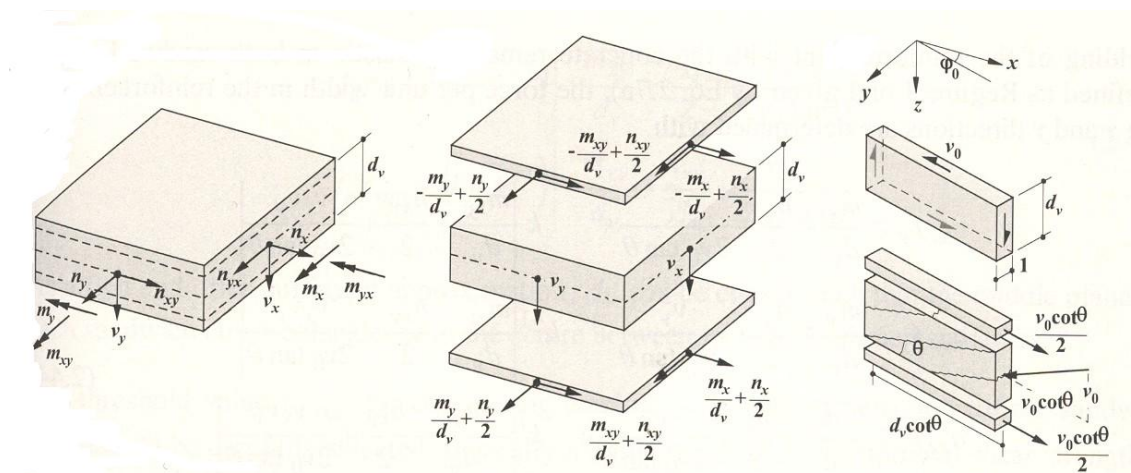


Figura 1.6 – Modelo das três camadas: a) Elemento de casca; b) Forças em cada uma das camadas; c) Transferência das tensões de corte em fase fendilhada e não fendilhada.

Com a excepção do método da Corda-Painel, de aplicação exclusiva a estruturas sujeitas a esforços de membrana e ainda em fase de desenvolvimento, todos os outros métodos de dimensionamento não nos dão informações acerca do desempenho em serviço da estrutura dimensionada, não sendo possível quantificar aberturas de fendas e deformações de forma realista. No entanto, os mais recentes conceitos de dimensionamento baseado no desempenho (“*performance based design*”), requerem o conhecimento de toda a resposta estrutural até ao colapso, permitindo um dimensionamento simultaneamente mais económico e mais seguro, nomeadamente no caso da acção sísmica (Maekawa et al. 2003). Por outro lado, em caso de

estruturas com comportamento mais complexo, é muitas vezes necessária uma análise mais rigorosa dos mecanismos de colapso que permita validar, corrigir ou otimizar o dimensionamento efectuado. Desta forma, uma metodologia geral de dimensionamento de estruturas laminares de betão pode ser resumida nas seguintes quatro etapas:

1. Estimativa das dimensões iniciais dos elementos estruturais, com base em esquemas de cálculo simplificados e apoiados na experiência prática, de forma a obter espessuras conformes com as condições de boa execução e durabilidade;
2. Determinação dos esforços internos da estrutura gerados pelas combinações de acções actuantes. O modelo de cálculo usualmente empregue é uma análise elástica com base no método dos elementos finitos;
3. Dimensionamento das secções, consistindo na verificação das dimensões iniciais adoptadas e na quantificação das armaduras para resistir aos esforços internos calculados. São empregues leis constitutivas não lineares para os materiais, com vista à determinação da capacidade resistente última, de acordo com os modelos de dimensionamento atrás mencionados.
4. Em casos mais complexos é realizada uma análise não linear com o traçado da resposta até à rotura, para clarificar o comportamento e validar, ou não, o dimensionamento proposto, permitindo uma correcta identificação do mecanismo de colapso.

A análise não linear de estruturas de betão armado e pré-esforçado desenvolveu-se notavelmente desde as primeiras aplicações há quase 40 anos atrás, resultado do intenso trabalho de investigação que tem vindo a ser desenvolvido no aperfeiçoamento dos modelos constitutivos do betão e no desenvolvimento de sofisticados algoritmos de análise. Estes progressos estão bem documentados em vários estados da arte, sendo ainda tema de muitos congressos e simpósios na actualidade. Concomitantemente, o enorme progresso no desempenho dos computadores a que se tem vindo a assistir, e que não dá mostras de abrandar, permite a realização de análises relativamente complexas num computador de secretária. Na *Figura 1.7* ilustra-se a evolução do tempo de cálculo necessário à análise não linear de uma viga em T através de um algoritmo que recorre a uma discretização em camadas. Pode-se ver do gráfico que, em 25 anos, o tempo de cálculo reduziu-se mais de 10^5 vezes.

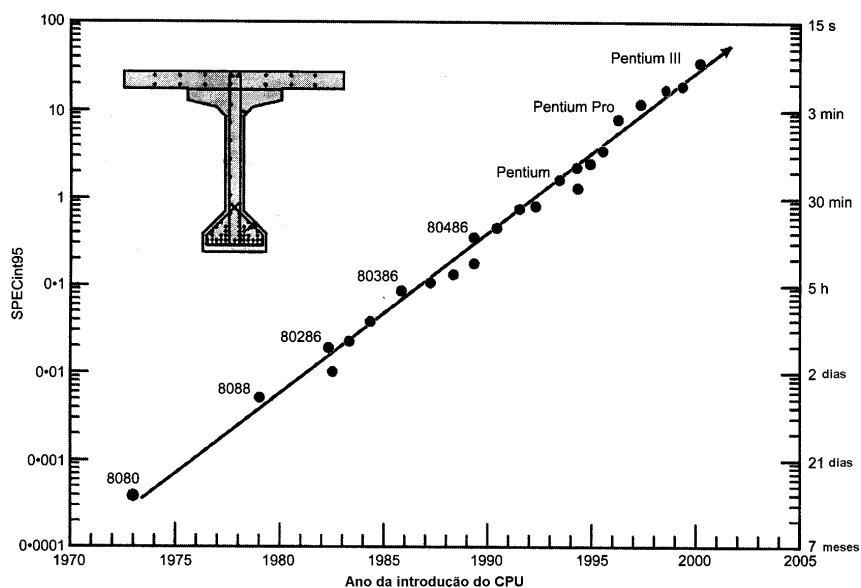


Figura 1.7 – Incremento da capacidade de cálculo computacional nos últimos anos (Vecchio 2001b).

Pode dizer-se que o estado do conhecimento no domínio da análise não linear de estruturas progrediu até ao limiar que as torna numa ferramenta de análise e dimensionamento, não se cingindo apenas o seu uso ao domínio da investigação. Recentemente, iniciou-se o desenvolvimento de métodos de dimensionamento automático de armaduras a partir de análises não lineares, sendo os resultados obtidos encorajadores (An e Maekawa 2004). São várias as situações onde, já hoje, a análise não linear de estruturas começa a desempenhar um papel importante:

- A análise de estruturas existentes à luz dos regulamentos actuais conduz muitas vezes à conclusão da necessidade de proceder a trabalhos de reforço, cujos custos económicos podem ser elevados. A decisão de intervir pode, e deve, ser baseada numa análise realista da capacidade de carga da estrutura, podendo eventualmente ser evitada a intervenção, com evidente economia de recursos.
- No caso de estruturas degradadas, as ferramentas de análise não linear podem servir como um precioso instrumento para optar, de forma racional, entre diferentes cenários de reforço (Dalmagioni e Pellegrini 2001).
- A aplicação das técnicas de análise não linear a estudos de carácter forense tem-se revelado essencial na avaliação das causas de vários acidentes ocorridos (Canisius 2001; Vecchio 2002; Vecchio et al. 2004).
- No caso de pormenores estruturais delicados e com elevado grau de repetição, a análise não linear de estruturas apresenta-se como um auxiliar precioso na optimização do processo de dimensionamento (Cervenka 2002). No caso de estruturas de custo muito elevado e de grande relevância social, a optimização do dimensionamento pode trazer

grandes vantagens económicas. A título ilustrativo, em (fib 2004; Maekawa et al. 2004) refere-se uma aplicação de ferramentas de análise não linear de estruturas no processo de dimensionamento de grandes tanques enterrados de armazenamento de gás natural numa zona de elevada sismicidade, que permitiram a redução em cerca de 50% dos custos de construção.

- Por último, a análise não linear de estruturas encontra grande aplicação no desenvolvimento de novos sistemas estruturais, por exemplo, no âmbito da pré-fabricação, no desenvolvimento de novos sistemas de ancoragem de pré-esforço, entre outros, permitindo grande optimização de soluções e reduzindo significativamente o número de ensaios experimentais necessários à validação dos protótipos.

1.2 – OBJECTIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Dada a relevância dos modelos de análise não linear no processo de análise e dimensionamento de estruturas de betão e constatando-se ser este um domínio no qual a formação fornecida na generalidade das escolas de engenharia portuguesas é diminuta, senão inexistente, o desenvolvimento desta dissertação teve em vista o alcance dos seguintes objectivos:

- Adquirir competências no domínio da análise não linear de estruturas de betão armado, dado que a aplicação deste tipo de formulações requer experiência e um elevado grau de especialização (Vecchio 2001b), assim como conhecimentos aprofundados da mecânica não linear do betão estrutural e das diferentes abordagens computacionais utilizadas.
- Avaliar as capacidades de diferentes formulações, implementadas num programa de elementos finitos, através da sua aplicação a uma série de exemplos, dos quais se dispõem de resultados experimentais credíveis.
- Ilustrar o papel da análise não linear de estruturas na clarificação do funcionamento de alguns sistemas estruturais de comportamento mais complexo.
- Aplicar as ferramentas disponíveis na verificação da segurança de uma estrutura laminar complexa, a ETAR de Sobreiras, demonstrando a sua utilidade prática.
- Com a experiência adquirida concluir sobre as possibilidades e os desafios que ainda hoje se colocam neste domínio.

Considerando os objectivos acima expostos, a dissertação organiza-se em seis capítulos, o primeiro dos quais é o presente capítulo introdutório.

No Capítulo 2 é feita uma revisão do estado da arte do conhecimento do comportamento do betão estrutural, simples ou armado, sujeito a cargas estáticas e de curta duração, mas não necessariamente monotónicas. Dada a grande quantidade de conhecimento disponível neste domínio, e para poder ser exaustivo, os efeitos diferidos, o fenómeno da fadiga e os efeitos dinâmicos do carregamento foram deixados de fora da pesquisa efectuada.

No Capítulo 3 referem-se as abordagens computacionais mais comuns à mecânica não linear do betão estrutural. Especial ênfase é colocada nas formulações do mesmo tipo das que estão implementadas no programa DIANA 8.1, dado ter sido este o programa utilizado nos exemplos estudados. O enfoque é colocado ao nível dos modelos constitutivos, procurando-se evidenciar as suas virtudes e as suas limitações.

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação dos modelos disponíveis na reprodução da resposta e do mecanismo de colapso observados em alguns elementos estruturais testados em laboratório, alguns dos quais no âmbito da presente dissertação. Na análise não linear de estruturas laminares de betão, os elementos que colocam especiais exigências aos modelos constitutivos e aos algoritmos de solução não linear são aqueles em que os esforços de corte no plano da estrutura têm um papel preponderante no cômputo da resposta e do mecanismo de colapso, pelo que os exemplos seleccionados são estruturas essencialmente sujeitas a esforços de membrana. Nos problemas onde a rotura é governada por um mecanismo de flexão, os resultados numéricos obtidos são, em geral, satisfatórios, independentemente do modelo utilizado. Com os exemplos analisados pretendeu-se efectuar uma calibração de parâmetros e procedimentos com vista à análise de estruturas reais, assim como discutir o funcionamento de algumas estruturas tipo parede.

No Capítulo 5 é ilustrada uma aplicação das técnicas de análise não linear num caso concreto e de interesse prático no processo de dimensionamento e verificação de segurança de estruturas laminares de betão de comportamento menos corrente. Os elementos estruturais analisados são as paredes divisórias que sustentam o nível superior de reservatórios da ETAR de Sobreiras.

Por fim, no Capítulo 6 são sumariadas as conclusões resultantes do trabalho desenvolvido, efectuando-se uma síntese das possibilidades e dos desafios que ainda hoje se colocam na modelação e análise de estruturas laminares de betão. A partir destas conclusões são apontadas algumas direcções nas quais se considera pertinente continuar a desenvolver o trabalho iniciado com esta dissertação.

CAPÍTULO 2

MECÂNICA NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

2 – MECÂNICA NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

2.1 – INTRODUÇÃO

O objectivo deste capítulo consiste na caracterização do comportamento mecânico do betão estrutural sujeito a cargas estáticas de curta duração, mas não necessariamente proporcionais. Privilegiou-se uma abordagem eminentemente física dos fenómenos no intuito de fornecer uma base para a formulação de modelos, as leis constitutivas, que traduzam o comportamento observado

A formulação de leis constitutivas pressupõe a existência de um *volume de controlo* sobre o qual são estabelecidas. No caso do betão, o estudo do seu comportamento é usualmente colocado a três níveis (*Figura 2.1*): macroscópico (“macro-level”), mesoscópico, (“meso-level”) e microscópico (“micro-level”) (Wittmann 1983).

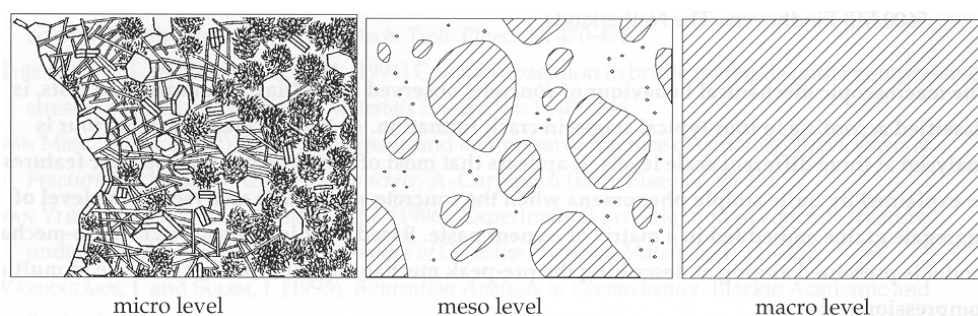


Figura 2.1 – Níveis de análise no estudo do comportamento do betão (Bongers e Rutten 1998).

Ao nível microscópico analisam-se a microestrutura e as propriedades mecânicas da pasta de cimento endurecida. O refinamento da análise desce até às moléculas de silicato de cálcio hidratado unidas por forças de Van der Waals. A este nível, em betão normal de cimento Portland, uma das características mais notáveis é a existência de uma interface porosa entre os agregados e a pasta de cimento endurecida. Esta interface pode ser considerada o elo mais fraco da microestrutura do betão, na medida em que a densidade de poros e de micro fendas pré-existentes é muito mais elevada do que na restante pasta de cimento endurecida, tendo sido registados volumes de poros até 50% do volume total da interface. Esta zona ocupa cerca de 30 a 50% do volume total da pasta de cimento hidratada e a sua espessura varia entre os 25 e os 100µm (Larby (1991) segundo Bongers e Rutten (1998)).

No nível mesoscópico, o betão é considerado como um compósito de grãos de agregado, pasta de cimento endurecida, poros e fendas pré-existentes. A este nível, a interface porosa entre os agregados e a pasta de cimento é idealizada como uma interface de espessura nula e a pasta de

cimento endurecida como um meio isotrópico. Muitas das características mecânicas do betão observadas ao nível macroscópico podem ser explicadas pela sua estrutura heterogênea, tal como encarada a este nível.

A um nível macroscópico, o betão é tratado como um material homogéneo e a pesquisa dirige-se no sentido da obtenção de uma lei constitutiva válida para estados de tensão multiaxiais e da definição de uma envolvente de rotura. Estas relações constitutivas, traduzindo o comportamento não linear global, são as mais importantes do ponto de vista do engenheiro de estruturas.

Nas secções seguintes são resumidos os principais aspectos do comportamento do betão, descrevendo-se o comportamento macroscópico e traçando-se em seguida os aspectos essenciais das teorias que a um nível mais elementar sustentam as observações experimentais.

2.2 – FRACTURA POR TRACÇÃO DO BETÃO SIMPLES

2.2.1 – A importância da mecânica da fractura

O papel do comportamento à tracção do betão foi durante muito tempo considerado de menor importância nas análises à rotura de estruturas de betão. Isto deveu-se ao facto do betão ser um material mais adequado, e por conseguinte preferentemente utilizado, para resistir a esforços de compressão. Contudo, com a introdução dos conceitos da Mecânica da Fractura no estudo das estruturas de betão, nomeadamente no que se refere às questões do balanço energético, ficou clara a importância das propriedades do betão traccionado nas verificações à rotura. A premência da inclusão dos conceitos da Mecânica da Fractura na prática corrente de dimensionamento, e consequentemente no articulado dos actuais regulamentos, é sustentada pelas cinco razões a seguir apresentadas (ACI 1999).

Razão 1: Energia necessária à formação de fendas

De um ponto de vista estritamente físico tem de ser reconhecido que enquanto a iniciação de uma fenda deve depender da tensão, um critério de resistência, a sua propagação requer um consumo de energia - a energia de fractura - que representa a energia dissipada por unidade de superfície de um sólido. Desta forma, um critério energético deve também ser considerado. Este argumento pode, no entanto, ser suficiente para um físico mas não para um engenheiro de projecto.

Razão 2: Objectividade dos cálculos

Qualquer teoria física deve ser objectiva, no sentido em que o resultado dos cálculos realizados com base nela sejam independentes de aspectos subjectivos, tais como a escolha de coordenadas, a escolha da malha de elementos finitos, etc. Uma poderosa abordagem à análise por elementos finitos do betão fendilhado é o conceito de fendilhação distribuída (introduzido por Rashid (1968)), no qual as fendas são modeladas como parte do contínuo. De acordo com esta abordagem a tensão num elemento finito é limitada pela tensão de rotura à tracção do material, f_{ct} . Após atingir f_{ct} , a tensão no elemento finito deve decrescer. Nas primeiras modelações efectuadas assumiu-se uma queda vertical da tensão para zero. Cedo se percebeu que resultados mais realistas eram obtidos se fosse considerado um diagrama de amolecimento (*strain softening* na literatura em inglês), com diminuição gradual da tensão. No entanto, após este procedimento ter sido implementado em muitos programas e largamente utilizado, descobriu-se que os resultados não eram objectivos no que diz respeito à malha de elementos finitos escolhida. Não só a ductilidade calculada era incorrecta, como também a carga de rotura. Dada a localização da fractura devida ao regime de amolecimento, a energia dissipada no processo de fractura decresce com o refinamento da malha e converge para zero se o tamanho do elemento h tender para zero, o que obviamente é inaceitável. A única forma de ultrapassar esta limitação é a introdução de um critério energético baseado na Mecânica da Fractura.

Razão 3: Inexistência de patamar de cedência

Diz-se que uma estrutura é dúctil, e que tem um comportamento plástico, quando apresenta um diagrama carga-deslocamento como o idealizado na *Figura 2.2 a)*, reflectindo a capacidade de redistribuição dos esforços após a cedência das armaduras. Uma característica típica destas estruturas resulta de desenvolverem um mecanismo de um grau de liberdade de modo que a rotura prossegue simultaneamente em várias zonas da estrutura. O diagrama carga-deslocamento deste tipo de roturas exibe um longo patamar de cedência.

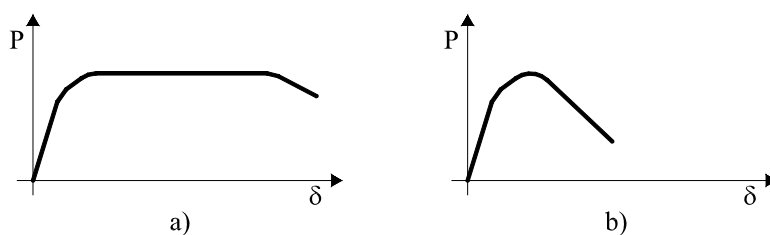


Figura 2.2 – Diagramas carga-deslocamento: a) estrutura dúctil; b) estrutura frágil.

Se o diagrama carga-deslocamento não apresenta esse patamar, diz-se que a estrutura é frágil. Um comportamento deste tipo está ilustrado na *Figura 2.2 b)* e implica, a um nível macroscópico, a existência de um ramo de amolecimento na lei material. Este facto implica ainda que na rotura não se desenvolva o mecanismo atrás referido, mas sim a propagação da fractura numa região localizada e não simultânea com outras regiões da estrutura.

Razão 4: Capacidade de absorção de energia e ductilidade

A área delimitada pelo diagrama carga-deslocamento representa a energia absorvida pela estrutura até à rotura, e que lhe é fornecida pelas cargas exteriores. A consideração desta energia é fundamental em carregamentos dinâmicos, e determina a ductilidade de uma estrutura. A análise plástica não dá informações acerca do comportamento estrutural durante o regime de amolecimento e, consequentemente, da energia dissipada neste processo.

Razão 5: Efeito de escala

O efeito de escala é, para os engenheiros projectistas, provavelmente a razão mais convincente para o uso dos conceitos da Mecânica da Fractura no dimensionamento de estruturas. O efeito de escala é definido através da comparação de estruturas geometricamente semelhantes, mas com dimensões diferentes, e é convenientemente caracterizado em termos da tensão nominal σ_N para a carga máxima P_u . A dependência de σ_N com o tamanho da estrutura é denominada de efeito de escala (“size effect”). A tensão nominal não necessita de ser uma tensão instalada na estrutura, mas em geral pode ser definida na forma

$$\sigma_N = c_n \frac{P_u}{bd} \quad (2.1)$$

em que c_n é uma constante escalar, b é a espessura e d é uma dimensão da estrutura, de forma que bd é uma área de referência.

As teorias clássicas, tais como a teoria da elasticidade com recurso a tensões admissíveis, a análise plástica limite, ou outras que definam a rotura em função de um critério de resistência, não prevêm qualquer dependência de σ_N com o tamanho da estrutura. A Mecânica da Fractura Elástica Linear (*Linear Elastic Fracture Mechanics* – LEFM) prevê uma lei para o efeito de escala que se traduz por uma recta no gráfico da *Figura 2.3*. Dado o betão não ser um material elástico linear, o efeito de escala observado pode ser traduzido pela curva a cheio da *Figura 2.3*, resultante da utilização de conceitos da Mecânica da Fractura Não Linear (*Nonlinear Fracture Mechanics* - NLFM), resultando um comportamento de transição entre as tensões dadas pelo critério de resistência e pela LEFM. As deduções das expressões que conduzem ao gráfico da *Figura 2.3* vão ser apresentadas em **2.2.2** e em **2.2.3**.

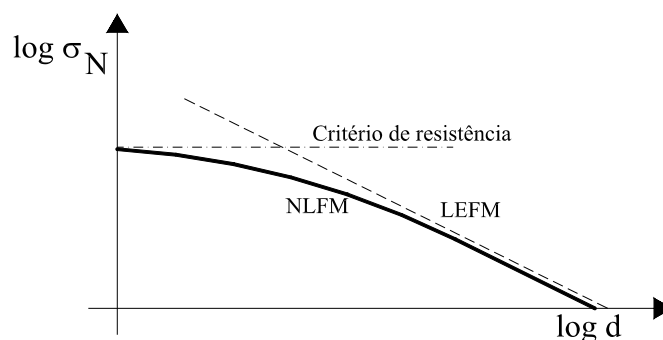


Figura 2.3 – Efeito de escala no valor de σ_N para estruturas geometricamente semelhantes.

O efeito de escala também tem repercussão na ductilidade da estrutura, e pode ser explicado pelo modelo reológico da Figura 2.4. A estrutura pode ser idealizada como uma associação em série e em paralelo de zonas fendilhadas e não fendilhadas (aqui simplificadamente consideradas elásticas). O efeito de escala na ductilidade pode ser explicado pela componente referente à associação em série. Quanto maior for a estrutura, maior será o deslocamento da zona elástica, pelo que no regime de amolecimento poderá até ocorrer o fenómeno de “snapback” ilustrado na Figura 2.4, em que a carga se torna instável após o seu valor máximo, mesmo em ensaios com controlo de deslocamentos. O deslocamento último u_{cr} é uma medida da ductilidade, ductilidade esta que não é uma propriedade do material, mas antes uma propriedade estrutural dependente do tamanho da estrutura.

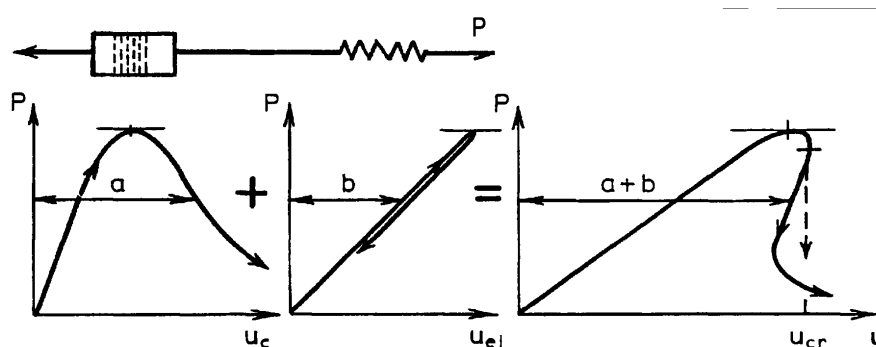


Figura 2.4 – Efeito de escala na ductilidade de uma estrutura (ACI 1999).

Estes efeitos de escala têm um carácter determinístico. O efeito do tamanho da estrutura na sua resistência foi inicialmente abordado numa perspectiva estatística, segundo a teoria do elo mais fraco (“weakest link statistics”). O efeito de escala era explicado pelo carácter aleatório das características resistentes do material, já que numa estrutura de maiores dimensões a probabilidade de ocorrência de uma zona (elo da cadeia) com resistência inferior é maior, seguindo uma distribuição de probabilidade proposta por Weibull. Esta explicação certamente é correcta para uma barra uniformemente traccionada cuja rotura ocorra imediatamente após se atingir f_{ct} . Nas estruturas de engenharia civil usualmente (e desejavelmente) a rotura dá-se após propagação estável da fractura. Nestas circunstâncias, a dimensão da zona de processamento da fractura não é suficientemente grande para que o efeito estatístico se evidencie.

2.2.2 – Mecânica da fractura elástica linear (LEFM)

Na LEFM assume-se que todo o processo de fractura toma lugar na extremidade da fenda e que o restante volume do corpo permanece elástico. Com estas premissas, a propagação das fendas pode ser estudada, mas não a sua formação. São possíveis os três modos de fractura representados na *Figura 2.5*, podendo qualquer tipo genérico de fractura ser expresso à custa de uma combinação linear dos três.

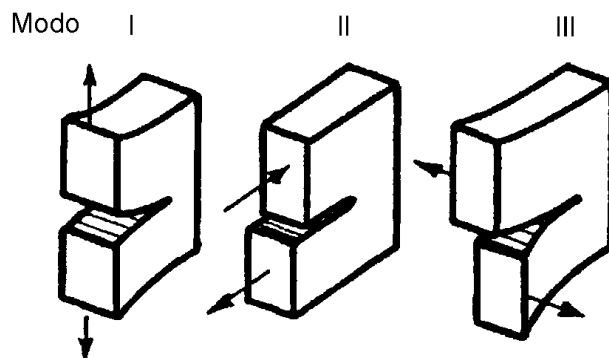


Figura 2.5 – Modos de fractura (ACI 1999).

A introdução de uma fenda num corpo linear elástico introduz uma singularidade, na medida em que todas as componentes não nulas do tensor das tensões tendem para infinito à medida que a distância r à extremidade da fenda se aproxima de zero. Irwin estudou esta singularidade (Alfaite 1992) e expressou o campo de tensões de um corpo de forma genérica e com qualquer tipo de carregamento, numa vizinhança suficientemente próxima da extremidade da fenda através das expressões (2.2), (2.3) e (2.4) (ver *Figura 2.6*). Nestas expressões os índices *I*, *II* e *III* referem-se aos modos de fractura elementares, θ é a coordenada polar e $f(\theta)$ uma função independente da geometria e do carregamento. Os parâmetros K_I , K_{II} e K_{III} são os chamados factores de intensidade de tensão (*stress intensity factors*), e dependem da geometria do corpo, das condições fronteira, do carregamento e da dimensão da fenda.

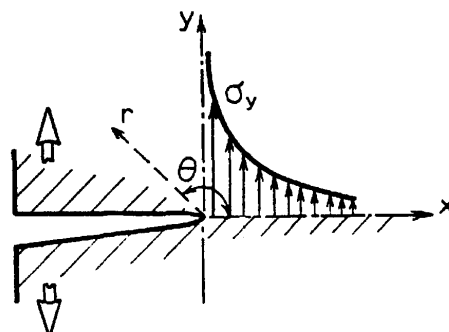


Figura 2.6 – Distribuição de tensões na vizinhança da extremidade de uma fenda num meio linear elástico (ACI 1999).

$$\sigma_{ij}^I = K_I \frac{f_{ij}^I(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij}^{II} = K_{II} \frac{f_{ij}^{II}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij}^{III} = K_{III} \frac{f_{ij}^{III}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.4)$$

O facto de a teoria da elasticidade prever que a tensão na vizinhança da extremidade de uma fenda se aproxima de infinito, não importa quão pequena seja a carga aplicada, levou Griffith (Alfaiate 1992) a introduzir um critério energético como condição de propagação da fractura. Sendo U_{tot} a energia total do sistema, Π a energia potencial da estrutura, U a energia elástica de deformação, W_{ext} o trabalho das forças exteriores e W_s a energia de superfície dissipada na formação de novas superfícies de fractura, pode-se escrever:

$$\Pi = U - W_{ext} \quad (2.5)$$

$$U_{tot} = \Pi + W_s \quad (2.6)$$

A propagação da fractura dá-se à custa da dissipação de energia potencial sob a forma de energia de superfície, mantendo constante a energia total do sistema segundo a expressão (2.7), em que a é a coordenada que define o comprimento da fenda.

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = \frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{\partial W_s}{\partial a} = 0 \quad (2.7)$$

Definindo $\sigma_N^2/2E$ como a densidade volumétrica de energia de deformação, $\alpha = a/d$, $\varphi(\alpha)$ como uma função da geometria da estrutura, c_0 como uma constante escalar, $V = c_0 b d^2$ como o volume da estrutura e G como taxa de dissipação de energia elástica de deformação por unidade de superfície da fractura, obtêm-se as seguintes expressões:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = c_0 b d^2 \frac{\sigma_N^2}{2E} \varphi(\alpha) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial a} = G b \quad (2.9)$$

Considerando desprezável a variação do trabalho das forças exteriores, pode-se escrever:

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow G_{cr} b = -\frac{1}{d} \frac{\partial U}{\partial \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_N = c_n \sqrt{\frac{E G_{cr}}{g(\alpha) d}} \quad (2.10)$$

com $g(\alpha) = -\frac{1}{2} c_0 c_n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$

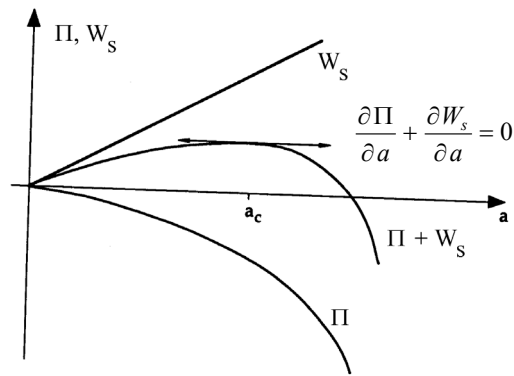


Figura 2.7 – Representação gráfica do critério de Griffith. Adaptado de Alfaiate (1992).

A expressão (2.10) estabelece o critério de Griffith (generalizado para uma geometria qualquer), que prevê que quando a taxa de dissipação de energia atinge um valor crítico G_{cr} , a fenda propaga-se (Figura 2.7). Esta energia G_{cr} é estabelecida como uma propriedade do material. Esta expressão traduz ainda um efeito de escala associado à tensão nominal que provoca a propagação da fractura, que numa escala logarítmica é traduzido por uma recta de declive $-1/2$:

$$\log(\sigma_N) = -\frac{1}{2} \log(d) + const. \quad (2.11)$$

Este efeito de escala é explicado pelo facto da energia necessária à evolução da fissuração crescer com a superfície necessária à formação de novas fendas, enquanto que a energia disponível para a fissuração cresce com o volume da estrutura (Figura 2.8).

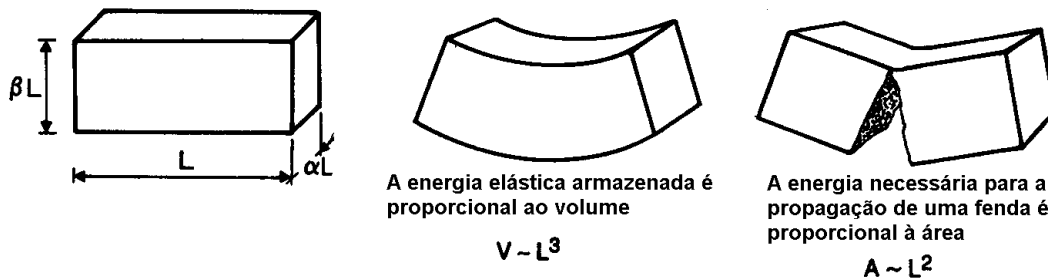


Figura 2.8 – Origem do efeito de escala na tensão de rotura. Adaptado de (Tommaso 1989).

É possível ainda demonstrar uma relação entre os factores intensidade de tensão e a taxa de dissipação de energia superficial, e a equivalência entre a formulação do critério de propagação

da fractura estabelecido à custa de G_{cr} ou de um valor K_{cr} (ACI 1999; Alfaiate 1992; Reinhardt 1989a).

2.2.3 – Mecânica da fractura não linear (NLFM)

Com base no exposto em 2.2.2 é possível determinar a condição de estabilidade da fissuração num material com comportamento elástico e linear, recorrendo ao critério de Griffith. Na realidade, os materiais não comportam uma tensão infinitamente grande, pelo que o processo de fractura não se pode localizar num ponto, mas numa zona de tamanho finito. Os modelos de NLFM consideram a existência da *zona de processamento da fractura* (ZPF), que consiste numa região danificada onde o material apresenta microfendilhação manifestada ao nível macroscópico por um decréscimo da tensão com o aumento da extensão (amolecimento) após se ter atingido a tensão de pico f_{ct} . O fenómeno de amolecimento não existe num material heterogéneo se a sua micro ou mesoestrutura for considerada com uma resolução suficiente, e deve ser considerado como um mero expediente macroscópico no intuito de proceder à homogeneização do material (Bazant 1986).

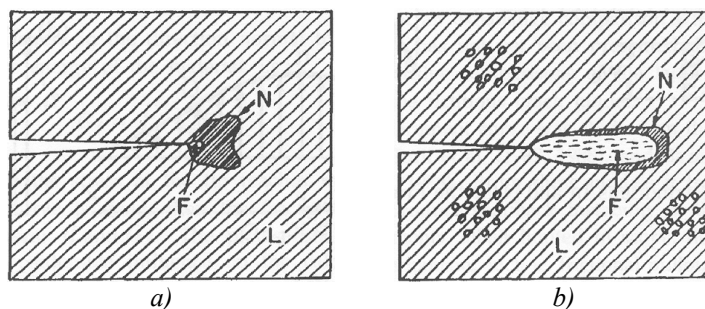


Figura 2.9 – Comparação dos tamanhos da zona de processamento da fractura (F), da zona com comportamento não linear (N) e da zona elástica (L) nos metais (a) e no betão (b). Retirado de (Bazant e Oh 1983).

Nos metais a ZPF é pequena quando comparada com a zona plástica que se desenvolve nos pontos onde o critério de cedência do material foi violado, cancelando a singularidade do campo elástico de tensões. Nos materiais mais heterogéneos, como o betão, a existência de agregados origina um desenvolvimento muito maior da ZPF, sendo reduzido o tamanho da região com comportamento não linear (Bazant e Oh 1983)(Figura 2.9).

2.2.3.1 – Processo de fractura e comportamento deformacional

Na Figura 2.10 está representada uma curva tensão/deslocamento típica de um ensaio de tracção numa peça de betão. Na fase de amolecimento, dada a instabilidade deste regime, a interacção entre o provete e a máquina de ensaio é muitas vezes difícil de eliminar. A exacta separação entre aquilo que é um comportamento do material ou um efeito estrutural é um aspecto delicado deste tipo de ensaios e motivo de aceso debate. Referências às técnicas de

ensaio para estudar problemas de fractura, e respectiva influência sobre os resultados obtidos, podem ser encontradas na bibliografia (Hordjick 1992; Schlangen 1993; Van Mier 1986).

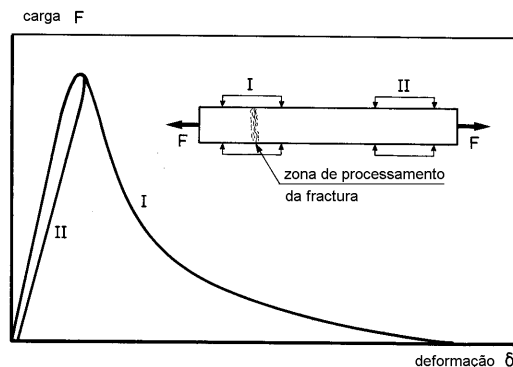


Figura 2.10 – Comportamento de betão num ensaio de tracção (Hordjick 1992).

No que se refere ao comportamento deformacional, e observando a *Figura 2.10*, verifica-se que até níveis de tensão relativamente próximos da tensão de pico a resposta é aproximadamente linear. Ao nível macroscópico as tensões e as extensões estão uniformemente distribuídas ao longo da peça. Imediatamente antes da carga de pico, as microfendas existentes começam a crescer na interface entre a pasta de cimento e os agregados, ao mesmo tempo as extensões começam a localizar-se numa zona de largura finita e a não linearidade no diagrama torna-se mais evidente. Esta zona microfissurada, a ZPF, onde as deformações se começam a localizar foi detectada experimentalmente por vários investigadores na extremidade de fendas macroscópicas em ensaios de flexão sobre vigas entalhadas (Alfaiate 1992).

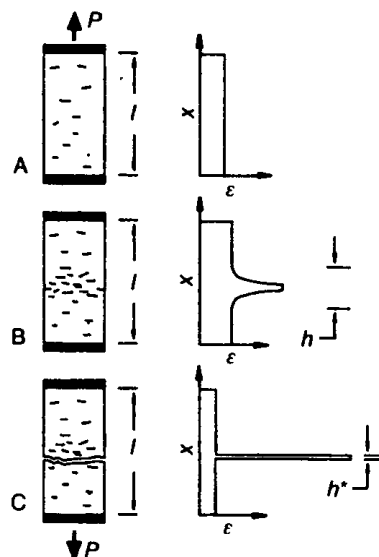


Figura 2.11 – Representação esquemática do processo de fractura com a localização progressiva das deformações (CEB 1996).

Com o evoluir da deformação as microfendas coalescem até originarem uma fenda macroscópica (*Figura 2.11*). Durante esta fase o mecanismo resistente altera-se progressivamente. Até à tensão de pico a transferência de tensões depende da rigidez e

resistência dos agregados, da pasta de cimento endurecida e da aderência entre estes dois constituintes. No regime de amolecimento verificado na ZPF, ao mesmo tempo que as restantes zonas do provete descarregam, a transferência de tensões através de mecanismos de engrenamento entre os agregados (“aggregate interlock”) e efeitos de ponte entre faces das fendas (“crack face bridging”) (Figura 2.12) vão ganhando cada vez mais importância (Hordjick et al. 1989).

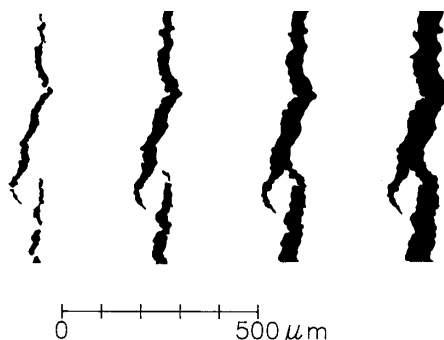


Figura 2.12 – Efeitos de ponte entre fendas observado ao microscópio óptico. Retirado de (Schlangen 1993).

A superfície da fenda macroscópica é altamente irregular, irregularidade essa directamente relacionada com o tamanho dos agregados e com a relação entre sua resistência e a aderência à pasta de cimento endurecida. Em betões de resistência normal a fendilhação macroscópica processa-se contornando os agregados, dando origem a uma textura no plano da fractura tanto mais irregular quanto maiores forem aqueles. Em betões de agregados leves, ou em betões de alta resistência, a superfície da fractura intersecta os agregados e apresenta uma textura menos irregular. Verifica-se que quanto mais irregular for a superfície de fractura, mais prolongado e mais suave será o ramo de amolecimento da curva da Figura 2.10. Para uma interpretação física mais detalhada do fenómeno do amolecimento em ensaios uniaxiais de tracção em prismas de betão consultar (Van Mier 1986).

O efeito dos estados de tensão multiaxiais reflecte-se numa diminuição da resistência à tracção sempre que existam compressões nas restantes direcções principais. Por outro lado, a existência de compressões, ou de carregamentos anteriores em compressão, origina uma acentuada diminuição do módulo de elasticidade. Esta constatação experimental pode ser explicada pela microfendilhação na interface porosa entre a pasta de cimento endurecida e os agregados originada pelo carregamento de compressão, conforme irá ser referido em 2.4.1. Este dano essencialmente acumulado na interface reduz a aderência entre a pasta e os agregados, fazendo com que a rigidez na recarga em tracção seja essencialmente determinada pela pasta de cimento (Hordjick et al. 1989). Do que é do conhecimento do autor, o efeito dos estados multiaxiais de tensão no ramo de amolecimento ainda não foram investigados.

Num ensaio cíclico, a envolvente dos carregamentos cíclicos pode ser considerada igual à envolvente monotónica. O andamento dos ciclos carga/descarga tem o aspecto apresentado na *Figura 2.13*. É notório que a degradação da rigidez está directamente relacionada com a máxima extensão de tracção experimentada.

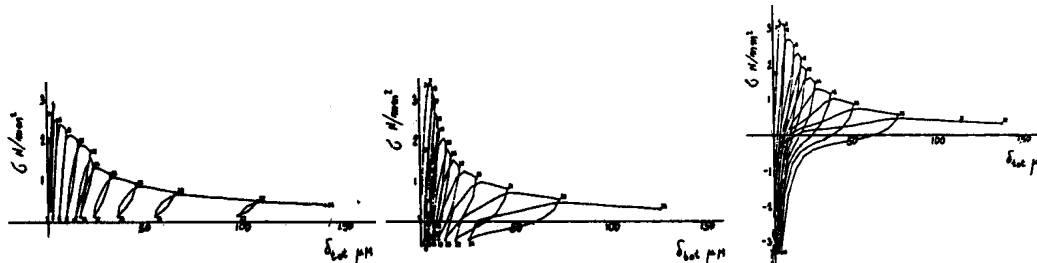


Figura 2.13 – Resultados típicos de ensaios de tracção uniaxiais cíclicos com várias amplitudes do ciclo. Retirado de (Yankelevsky e Reinhardt 1989).

Segundo resultados experimentais obtidos por Maekawa e Okamura (1983), na rotura por tracção existe uma relação unívoca entre a tensão de rotura f_{ct} e a máxima extensão de compressão $\epsilon_{2,max}$ já experimentada pelo material em carregamentos anteriores, conforme atestam os resultados da *Figura 2.14*.

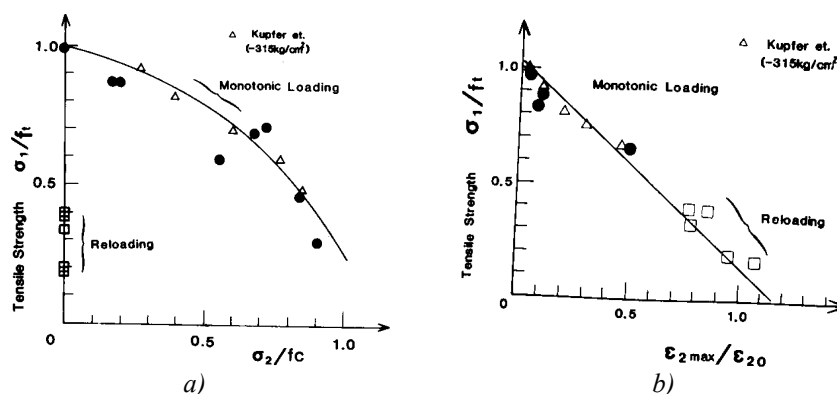


Figura 2.14 – Pontos de rotura por tracção no espaço das tensões (a) e das extensões principais (b). Retirado de (Maekawa e Okamura 1983).

Ainda não existe consenso absoluto sobre o facto da iniciação do processo de fractura no betão se dever exclusivamente ao Modo I, embora a evidência experimental aponte nesse sentido. As microfissuras existentes no seio de betão têm uma orientação aleatória, mas o seu processo de desenvolvimento parece seguir uma orientação definida pela direcção e intensidade da máxima tensão principal e pelas zonas mais frágeis da estrutura heterogénea que o caracteriza e não pela direcção que leva à máxima libertação de energia. Ensaio experimentais que indicavam a propagação de fissuras em Modo II (Bazant 1986), foram reinterpretados por Schlangen (1993), tendo-se verificado que, com a correcta avaliação dos efeitos das condições fronteira, se demonstra que a fractura se processou em Modo I. De qualquer forma, após o processo de fractura ter terminado, a rotação das tensões principais leva à existência de tensões de corte na superfície de fractura, cuja evolução será abordada na secção 2.3. No entanto, ensaios de corte

sobre juntas de argamassa entre peças pré-fabricadas revelaram um efeito de escala sempre que as argamassas eram de qualidade média ou elevada, ou sempre que fosse aplicado um pré-esforço que impedisse a fendilhação desta devido a esforços de natureza auto-equilibrada (temperatura e/ou retracção). Este facto aponta no sentido da existência de fractura em Modo II nas juntas, com necessidade de aplicação de conceitos da mecânica da fractura ainda não estabelecidos (Reinhardt 1989b). Em (Lourenço 1996) refere-se a existência de uma energia de fractura em Modo II, dependente da tensão de confinamento, utilizada para determinar a resistência à rotura por corte das juntas de argamassa em estruturas de alvenaria.

2.2.3.2 - Modelos de NLFM

Os modelos macroscópicos de NLFM mais correntemente utilizados podem ser classificados de acordo com o critério de localização assumido para as deformações em regime de amolecimento (*Figura 2.15*). Uma proposta de classificação dos modelos mais exaustiva, pode ser encontrada em (Elices e Planas 1989).

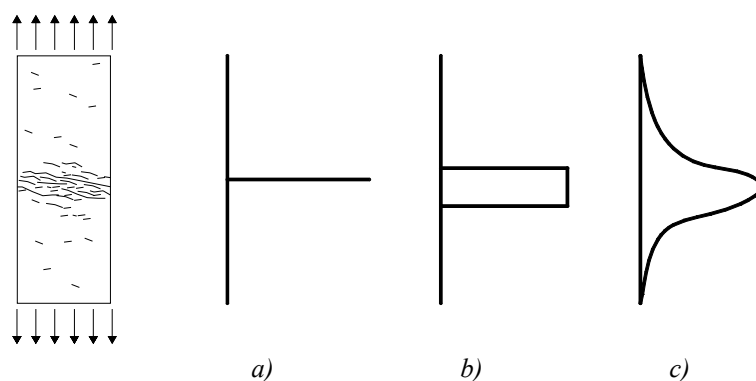


Figura 2.15 – Critérios de localização das deformações (adaptado de Elices e Planas (1989)): a) Localização numa linha (modelo da fenda fictícia); b) Localização numa banda de largura finita com extensão constante (modelo da banda fendilhada); c) Distribuição de extensões de acordo com uma forma genérica (modelos não locais) .

No que a seguir se descreve foi feita a tentativa de apresentar os modelos de NLFM independentemente do tipo de modelo constitutivo em que estão inseridos. No Capítulo 3, os modelos físicos a seguir apresentados serão revisitados à luz das abordagens numéricas utilizadas na sua implementação, sendo efectuada uma avaliação do âmbito da sua aplicabilidade, das potencialidades e limitações de cada um no contexto da análise por elementos finitos.

Modelo de fenda fictícia (“fictitious crack model”)

Em 1976, Hilleborg e os seus colaboradores (Hilleborg et al. 1976) desenvolveram um modelo para o betão em que a ZPF é aproximada por uma superfície de descontinuidade, uma fenda fictícia, dado que permite a transmissão de tensões entre as suas faces (*Figura 2.16*). Este modelo dá origem a uma abordagem discreta do problema da fractura.

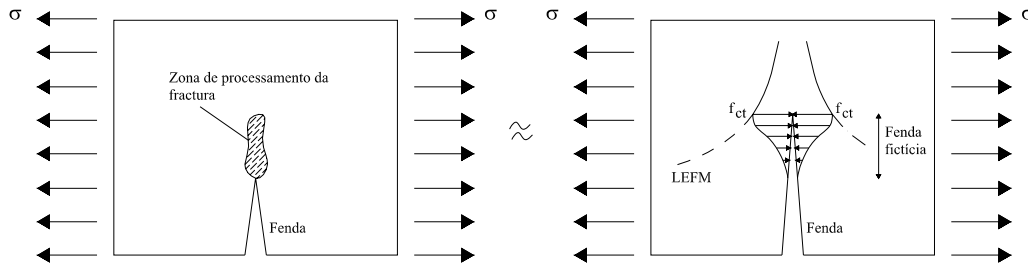


Figura 2.16 – Representação da fenda fictícia com a respectiva distribuição de tensões. Baseado em (Alfaiate 1992).

Dada a heterogeneidade do material, num espécimen submetido a um ensaio de tracção, a resistência à tracção f_{ct} atingir-se-á primeiro numa determinada zona do provete. Nesta zona verifica-se um acréscimo de alongamento w , enquanto que nas restantes zonas o material descarrega. O alongamento total do provete δ vem dado pela expressão (2.12) em que, ε , é a extensão do material nas zonas não fracturadas e L_t o comprimento total do provete.

$$\delta = \varepsilon L_t + w \quad (2.12)$$

A extensão média ε_m ao longo do provete vem então dada por:

$$\varepsilon_m = \varepsilon + \frac{w}{L_t} \quad (2.13)$$

Verifica-se desta forma que, antes de se atingir f_{ct} , circunstância em que $w = 0$, a extensão média é independente do tamanho L_t . Esta situação corresponde ao ramo ascendente da curva tensão/alongamento da *Figura 2.10*. Após o início da localização das deformações verifica-se que ε_m depende do tamanho do espécimen, pelo que a curva σ - ε_m não pode ser considerada uma propriedade do material. Desta forma, no modelo da fenda fictícia, a relação constitutiva uniaxial de tracção é assim descrita através de duas curvas (*Figura 2.17*):

- i. Uma curva tensão/deformação σ - ε para as zonas não fracturadas;
- ii. Uma curva tensão/alongamento σ - w para as zonas fracturadas.

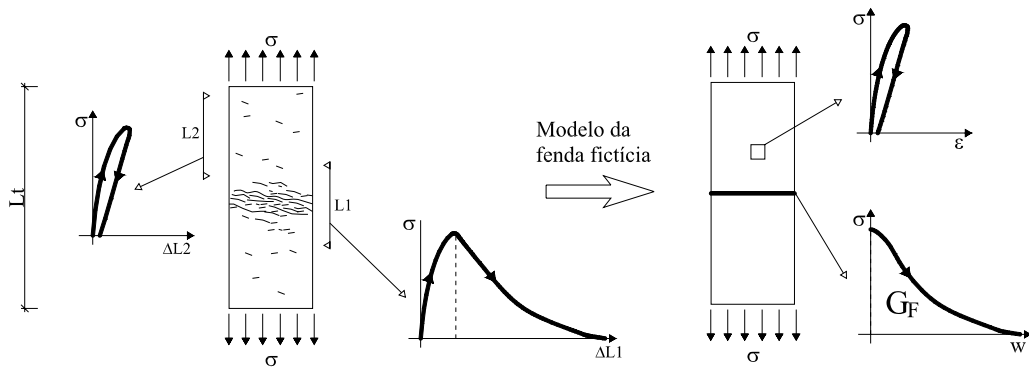


Figura 2.17 – Modelo da fenda fictícia.

Este modelo baseia-se nas seguintes hipóteses (Alfaiate 1992):

- i. O desenvolvimento da zona microfissurada tem início quando, num determinado local, a tensão principal máxima de tracção σ_I atinge a resistência uniaxial de tracção f_{ct} ;
- ii. A ZPF desenvolve-se na direcção perpendicular à direcção de σ_I ;
- iii. Na ZPF o betão encontra-se danificado, mas ainda tem capacidade para transmitir tensões. Esta capacidade depende do alongamento w verificado segundo a direcção de σ_I .
- iv. As propriedades da ZPF podem ser descritas através de uma curva de amolecimento macroscópica σ - w , obtida de um ensaio de tracção uniaxial. Esta curva é uma propriedade do material.

A consideração da relação σ - w como uma propriedade material leva à definição de um parâmetro material definido pela área do diagrama σ - w . Este parâmetro, que Hilleborg denominou de energia de fractura G_F , tem a dimensão de uma energia por unidade de superfície e corresponde à energia necessária para a formação de uma fenda completamente aberta de área unitária,

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma dw \quad (2.14)$$

onde w_c é a abertura da fenda fictícia a partir da qual o material deixa de transmitir tensões.

É de realçar a diferença conceptual entre a energia de fractura G_F atrás definida e a taxa crítica de dissipação de energia superficial G_{cr} , definida em 2.2.2 como a quantidade de energia dissipada por toda a estrutura quando a extremidade de uma fenda avança uma unidade de área. Com efeito, G_F está associada a uma localização fixa na estrutura, a ZPF, onde a dissipação de energia ocorre e atinge o valor G_F quando o material está completamente fracturado ($w = w_c$).

A consideração de f_{ct} e de G_F como características do material permite definir uma grandeza com a dimensão de um comprimento, o *comprimento característico*, também ele parâmetro material, e que é uma medida da sua ductilidade, sendo tanto maior quanto mais dúctil o material for:

$$l_{ch} = \frac{G_F E}{f_{ct}^2} \quad (2.15)$$

A determinação de G_F tem sido alvo de muita investigação, havendo várias propostas para a sua quantificação experimental (ACI 1999; Alfaiate 1992; Hilleborg 1985), cuja discussão excede o âmbito da presente dissertação. Em (Hordjick et al. 1989) pode ser encontrada uma referência à influência de vários factores no valor da energia de fractura, tais como a razão água cimento, a temperatura, as condições de cura, a idade do betão e o tipo e tamanho dos agregados.

Existem várias propostas para a forma do diagrama σ - w (Figura 2.18), desde a mais simples relação linear, passando pela bilinear, até à forma exponencial e à mais elaborada proposta de Reinhardt et al (1986). Existem também várias formulações analíticas para o comportamento cíclico evidenciado na Figura 2.13 (CEB 1996; Hordjick 1992; Maekawa et al. 2003; Yankelevsky e Reinhardt 1989), o mais detalhado dos quais é o proposto por Hordjick (1992), sendo excelente a sua concordância com os resultados experimentais.

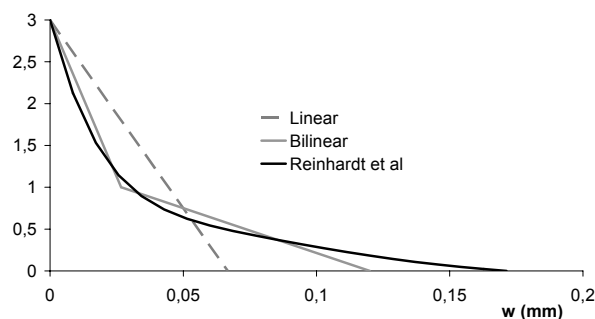


Figura 2.18 –Vários diagramas de amolecimento σ - w correspondentes a um betão com $f_{ct}=3\text{MPa}$ e $G_F=100\text{J/m}^2$

Modelo da banda fendilhada (“*crack band model*”)

Esta teoria admite a localização das deformações numa banda de largura finita, segundo uma distribuição constante, de acordo com a Figura 2.15 b). As hipóteses referentes ao critério de formação da zona microfissurada e orientação da ZPF com respeito à tensão principal de tracção são idênticas às do modelo da fenda fictícia. Numa primeira análise pode ser considerada como a formalização da abordagem do processo de fractura através da mecânica dos meios contínuos, fornecendo um enquadramento teórico aos modelos de fendilhação distribuída (“*smeared crack models*”). A teoria tomou corpo como independente da abordagem numérica no início dos anos

80, no conhecido artigo de Bazant e Oh (1983). Para além dos motivos de ordem computacional que se prendem com a conveniência da consideração do betão fendilhado como um contínuo, várias justificações de índole física podem ser avançadas para enquadrar esta teoria:

- i. A localização da fractura numa banda de largura finita encontra justificação no processo físico que macroscopicamente se manifesta como amolecimento. Estudos experimentais revelaram que a fractura contínua imediatamente atrás da ZPF segue um percurso altamente tortuoso, resultado do coalescimento das microfissuras aleatoriamente formadas na ZPF (ACI 1999). A dispersão destas fissuras numa banda é facilmente assimilável ao presente modelo.
- ii. A hipótese da localização das deformações da ZPF numa banda finita introduz a largura da banda h como um novo parâmetro material, de modo a garantir que a dissipação de energia devida ao processo de fractura é igual à energia de fractura do material G_F . Com base em estudos numéricos, Bazant propôs uma largura mínima de $h_c = n d_a$, onde d_a é a máxima dimensão do inerte e n igual a 3 para betões normais. Nos betões de alta resistência, a fenda macroscópica atravessa os inertes, pelo que a largura da banda será menor nestes casos. O valor de n deve ser superior a 3 para os betões de baixa resistência e para os betões reforçados com fibras. A largura mínima da ZPF introduz a importante noção de volume representativo, que deve ser encarado como o volume mínimo que ainda pode ser tomado para a modelação do betão como um contínuo, na sua vertente tradicional, abaixo do qual se torna necessário abandonar a abordagem macroscópica e considerar as heterogeneidades do material conforme ditadas pela sua estrutura mesoscópica. A distribuição constante das deformações na ZPF deve ser assim encarada como resultante de um processo de homogeneização da distribuição real (*Figura 2.15*).
- iii. Uma outra justificação para a consideração de um terceiro parâmetro num modelo de NLFM prende-se com o tratamento de situações de fendilhação estabilizada na presença de armadura ou fibras, em que as fendas têm um espaçamento definido, situação na qual o modelo da fenda fictícia não prevê a correcta dissipação de energia ao permitir a formação de duas fendas infinitamente próximas. O parâmetro h_c pode neste caso ser ajustado para ser equivalente ao espaçamento entre fendas, assegurando a objectividade dos cálculos (Bazant 1985; Bazant 1986).

As relações constitutivas para o modelo da banda fendilhada podem ser ilustradas através da *Figura 2.19*. Para o betão da ZPF a relação constitutiva expressa-se através de uma curva, característica do material, que é função da resistência à tracção f_{ct} , da energia de fractura G_F e da largura da banda h . A energia de fractura vem dada por (2.16) (*Figura 2.19*). Usualmente

considera-se que até atingir a extensão correspondente a f_{ct} , toda a deformação é recuperável, pelo que a energia dissipada fora da ZPF é nula ($\omega = 0$).

$$G_F = h \int_0^{\varepsilon_{t,u}} \sigma d\varepsilon_t - L_t \cdot \omega = h \int_0^{\varepsilon_{cr,u}} \sigma d\varepsilon_{cr} \quad (2.16)$$

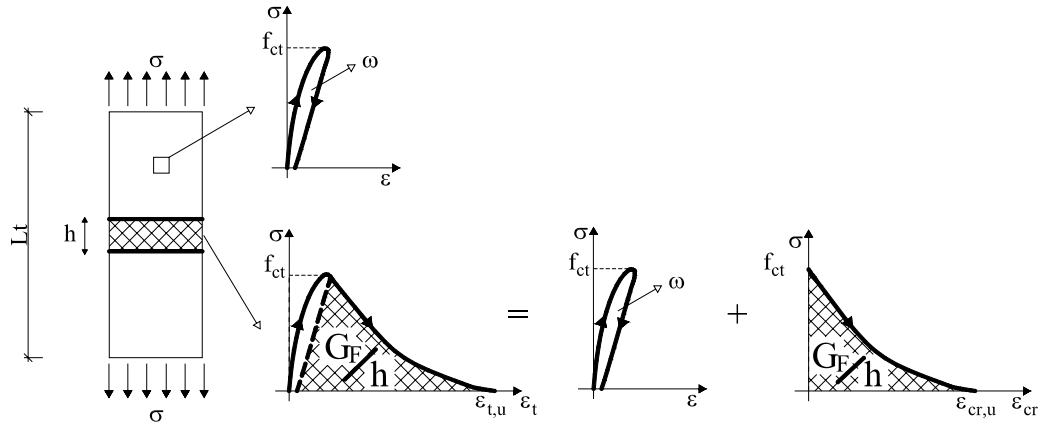


Figura 2.19 – Modelo da banda fendilhada.

Nas implementações numéricas em modelos de elementos finitos da teoria da banda fendilhada, a largura da banda h depende do tamanho e do esquema de integração dos elementos utilizados. A utilização das relações constitutivas conforme expressas na Figura 2.19 garante a objectividade dos resultados qualquer que seja o refinamento da malha utilizada, desde que o valor de G_F seja mantido. No caso de estruturas extensas, o tamanho dos elementos pode ser tal que, para garantir o valor de G_F e de f_{ct} , o diagrama tensão/extensão apresenta um “snapback” (Figura 2.20). Nestas circunstâncias deve-se reduzir o valor de f_{ct} para $f_{ct,eq}$, que no caso de se desprezar a dissipação de energia fora da ZPF ($\omega = 0$) e de se adoptar um diagrama de amolecimento linear, vem dado por (2.17), de forma a garantir as condições de equilíbrio energético (Bazant e Oh 1983).

$$f_{ct,eq} = \sqrt{\frac{2 E G_F}{h}} \quad (2.17)$$

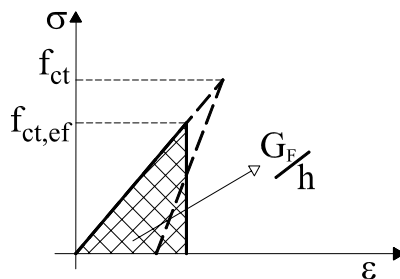


Figura 2.20 – Correção ao valor de f_{ct} para atender às condições de equilíbrio energético quando a malha de elementos finitos é grosseira.

As curvas σ - w atrás referidas podem continuar a ser utilizadas, adaptando-as ao conceito de disseminação das extensões da ZPF por uma banda de largura h . Disseminando a abertura da fenda fictícia pela largura da banda de fendilhação, obtêm-se a relação,

$$w = \varepsilon_{cr} h \quad (2.18)$$

Modelos não locais (“nonlocal continuum models”)

Num contínuo não local, o campo de tensões num dado ponto não depende unicamente da história do campo de extensões nesse ponto, mas também do campo de extensões numa dada vizinhança desse ponto. Em teoria, a tensão num ponto pode depender da história de extensão de todo o corpo, mas as interações entre pontos certamente diminuem com a distância, pelo que podem ser desprezadas a uma distância superior ao chamado raio de interação R .

A adopção de um contínuo não local representa uma generalização da teoria da banda fendilhada. Quando se usa o conceito de amolecimento na mecânica dos meios contínuos local, as zonas de amolecimento tendem a localizar-se, sendo necessário a introdução de um critério de localização. A forma mais simples de o fazer é impor uma deformação constante ao longo de uma banda de largura definida h , tal como exposto anteriormente. Contudo, prosseguindo o refinamento da malha de elementos finitos até valores inferiores a h_c , esta abordagem perde sentido físico, na medida em que não permite a obtenção do campo de extensões na ZPF ou averiguar como varia o desenvolvimento da ZPF com o evoluir do processo de fractura (ACI 1999; Bazant 1986). Parece óbvio que a densidade de microfendas não será uniforme ao longo de toda a ZPF, mas aumentará à medida que nos aproximamos do seu centro. A homogeneização da mesoestrutura do betão, a escalas inferiores a h_c , deixa de se poder fazer através de um campo uniforme de extensões.

Dois argumentos (Bazant 1991; Bazant e Jirasek 2002) podem ainda adicionar-se, reforçando a tese da abordagem não local:

- i. O crescimento das microfissuras não é determinado pelo estado local de tensão ou de extensão no ponto do contínuo correspondente ao centro da microfissura, mas antes pela libertação global de energia num volume finito que contém a referida microfissura. A dimensão deste volume depende do tamanho da microfissura e pode estar relacionado com a heterogeneidade do material.
- ii. As microfissuras interagem entre si podendo servir de amplificadores ou inibidores do processo de propagação.

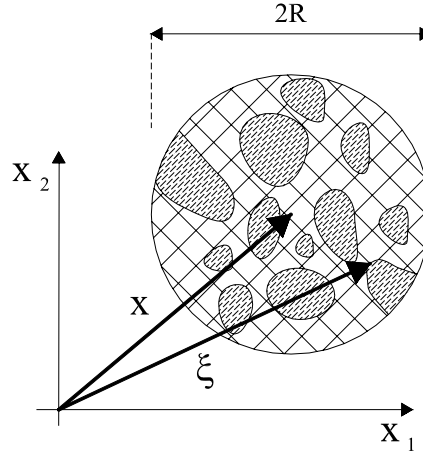


Figura 2.21 – Volume representativo do material usado para cálculo da média pesada de um dado campo.

De uma forma geral, a abordagem não local consiste em substituir uma certa variável por outra, obtida através de uma média pesada sobre uma vizinhança espacial de cada ponto em consideração (Figura 2.21). Sendo $f(x)$ um qualquer campo local num domínio V , o correspondente campo não local, $\bar{f}(x)$, é definido por (Jirasek 1998):

$$\bar{f}(x) = \int_V \alpha'(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.19)$$

Na expressão (2.19) $\alpha'(x, \xi)$ é a função não local para cálculo da média pesada, propriedade do material, satisfazendo a condição (2.20), de modo a não alterar um campo uniforme.

$$\int_V \alpha'(x, \xi) d\xi = 1 \quad \forall x \in V \quad (2.20)$$

Na proximidade da fronteira de um corpo, assume-se que a média é calculada somente na parte do domínio que está dentro do sólido pelo que, genericamente, a função $\alpha'(x, \xi)$ vem definida por (2.21), onde $\alpha(r)$ é uma função monotonicamente decrescente em função da distância $r = \|x - \xi\|$, onde ξ identifica o ponto emissor e x o ponto receptor no centro da vizinhança (Jirasek 2002b) (Figura 2.21).

$$\alpha'(x, \xi) = \frac{\alpha(\|x - \xi\|)}{\int_V \alpha(\|x - \varsigma\|) d\varsigma} \quad (2.21)$$

$\alpha(r)$ é muitas vezes considerada como uma função de distribuição de Gauss, de acordo com a expressão (2.22), onde N_{DIM} é o número de dimensões do espaço euclidiano (1, 2 ou 3) e l é o comprimento interno do contínuo não local, definido como uma propriedade do material (Jirasek e Bazant 2002).

$$\alpha(r) = e^{-\frac{N_{DIM}}{2} \left(\frac{r}{l}\right)^2} \quad (2.22)$$

É no entanto computacionalmente vantajoso considerar uma função polinomial (2.23) em forma de sino (Bazant e Jirasek 2002). A vantagem reside no facto desta função, ao contrário da (2.22), ser nula para valores de r superiores ao raio de interacção R , relacionado com l (a este respeito consultar (Jirasek e Bazant 2002)). Na *Figura 2.22* estão representadas as duas funções referidas.

$$\alpha(r) = \left\langle 1 - \frac{r^2}{R^2} \right\rangle^2 \quad (2.23)$$

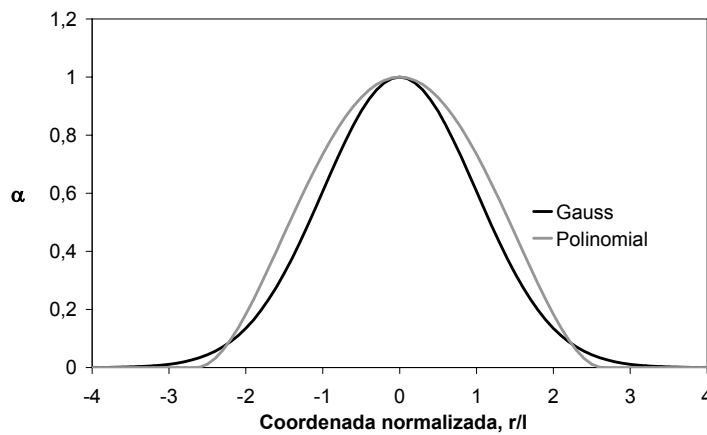


Figura 2.22 – Funções não locais para cálculo das médias pesadas.

Idealmente a função $\alpha(r)$ deverá ser obtida através de modelação da micro ou da mesoestrutura do betão. No presente estado do conhecimento, esse objectivo afigura-se ainda difícil de atingir, verificando-se, no entanto, que desde que a função seja suave, os resultados dos cálculos não são muito afectados pela sua forma, desde que o valor de l seja o adequado.

A escolha da variável sobre a qual se vão calcular as médias pesadas define o tipo de modelo não local, devendo no entanto respeitar certas condicionantes de índole física. Pijaudier-Cabot e Bazant (1987) sugerem que apenas as variáveis que originem o amolecimento sejam consideradas não locais, implicando por exemplo que apenas a extensão correspondente à fractura, e não a extensão total, seja não local. Em (Jirasek 1998) e (Bazant e Jirasek 2002) é feita uma discussão aprofundada dos méritos e dificuldades associadas a cada uma das abordagens utilizadas e referidas na literatura.

2.2.3.3 – Efeito de escala segundo a NLFM

Com base na existência de uma ZPF com um tamanho finito, é possível deduzir uma lei analítica do efeito de escala não linear, que se ajuste melhor aos resultados observados

experimentalmente em estruturas de betão e aos resultados obtidos pela aplicação dos modelos de NLFM atrás abordados. Admitindo que a ZPF em regime de amolecimento está suficientemente afastada das extremidades da estrutura, isso pode ser feito adaptando as expressões da LEFM, considerando porém uma fenda (zona macroscópica da fractura, onde já não são transmitidas tensões) com um comprimento acrescido de c (c corresponde assim ao comprimento da ZPF na Figura 2.9 b)). O facto de c não ser desprezável em relação a d (comprimento representativo da dimensão da estrutura), faz com que as redistribuições de esforços macroscópicas que aí se processam não sejam negligenciáveis, assim como a energia dissipada. A energia dissipada na formação da fenda deve depender do tamanho c da ZPF e o seu valor crítico atinge-se quando esta atinge o tamanho crítico c_f , que pode ser considerado uma propriedade do material. Expandindo em série de Taylor a função $g(\alpha)$ e linearizando-a no domínio $0 < c < c_f$, o valor de $g(\alpha_f)$ vem dado pela expressão (2.24).

$$g(\alpha_f) \approx g(\alpha_0) + g'(\alpha_0) \frac{c_f}{d} \quad (2.24)$$

com $\alpha_0 = \frac{a_0}{d}$ e $\alpha_f = \frac{a_0 + c_f}{d}$

Substituindo a expressão (2.24) na expressão (2.10) chega-se a uma lei não linear para o efeito de escala (Figura 2.3), unicamente dependente de parâmetros materiais:

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{E G_f}{g(\alpha_0)d + g'(\alpha_0)c_f}} \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) pode ser posta na forma da lei proposta por Bazant (1984), deduzida de uma forma geral através de condições de semelhança dimensional:

$$\sigma_N = \frac{B f_t}{\sqrt{1 + \beta}} \quad (2.26)$$

Na expressão (2.26), B é uma constante escalar dependente da geometria, do carregamento, das condições fronteira e do material, e β o chamado número de fragilidade (*brittleness number*) independente da geometria, sendo dados por:

$$B = \frac{c_n}{f_t} \sqrt{\frac{E G_f}{g'(\alpha_0)c_f}}$$

$$\beta = \frac{d}{\lambda_0 d_a} \quad (2.27)$$

$$\lambda_0 = \frac{c_f}{d_a} \frac{g'(\alpha_0)}{g(\alpha_0)}$$

com d_a a máxima dimensão do inerte.

Uma análise assintótica da expressão (2.26) permite concluir que para valores grandes do número de fragilidade a expressão aproxima a lei do efeito de escala da LEFM. Para valores pequenos, no limite zero, o produto Bf_i deve igualar a tensão nominal de rotura obtida por um critério de resistência (por exemplo a análise plástica limite) (*Figura 2.3*). Com efeito, se a estrutura for pequena, a ZPF não se pode desenvolver em toda a sua extensão, ocupando quase a totalidade do espécimen. Desta forma, o fluxo de energia para a ZPF é reduzido e o critério de resistência prevalece. Quando a estrutura é muito grande a ZPF tem um desenvolvimento desprezável em relação a d , satisfazendo os requisitos da LEFM. Estruturas com tamanhos intermédios devem observar um comportamento de transição como o ilustrado. Uma forma simples de introduzir os conceitos da NLFM no articulado dos regulamentos seria então,

$$P_{ult} = \frac{P_{plast}}{\sqrt{1 + \beta}} \quad (2.28)$$

em que P_{ult} é a carga de rotura da estrutura e P_{plast} é a carga calculada através dos métodos clássicos da análise limite. No entanto os métodos para determinar β ainda não estão suficientemente bem estabelecidos (ACI 1999).

A expressão (2.26) permite ainda balizar o domínio de validade dos métodos de análise estrutural :

- $\beta < 0.1$ análise plástica limite (maioria dos teste laboratoriais)
- $0.1 \leq \beta \leq 10$ mecânica da fractura não linear (maioria das estruturas de engenharia civil)
- $\beta > 10$ mecânica da fractura linear (algumas barragens)

A expressão (2.26) é uma expressão simplificada, sendo válida para uma relação de escalas de cerca de 1:20 entre a maior e a menor estrutura em análise (ACI 1999). Considerou-se ainda que a rotura ocorre após propagação estável da fractura, com a existência de uma fractura macroscópica de tamanho $a_0 > 0$ e não desprezável comparada com d . Expressões mais gerais para o efeito de escala foram propostas por Bazant, incluindo o caso em que a rotura se dá com a iniciação da fractura macroscópica e contemplando também o efeito das tensões residuais na região da fractura macroscópica devidas ao efeito de ponte entre as faces das fendas, excedendo no entanto a sua apresentação o âmbito desta dissertação. Para uma completa revisão do assunto recomenda-se leitura das referências (ACI 1999; Bazant 1984; Bazant 1986; Bazant 2001).

2.3 – TRANSFERÊNCIA DE TENSÕES DE CORTE ENTRE FENDAS

Durante o processo de fendilhação é possível identificar três etapas distintas (Feenstra et al. 1991a): (1) O estado correspondente ao ramo ascendente da curva da Figura 2.10; (2) o estado de desenvolvimento da fractura, a que corresponde o ramo de amolecimento da mesma curva; e (3) o estado final de fenda completamente aberta, não transmitindo tensões de tracção entre as suas faces. Nesta última fase, vários modelos analíticos têm sido propostos para reproduzir a transferência de tensões de corte entre fendas, alguns deles com base num modelo físico de interpretação da mecânica do problema, outros baseados em expressões empíricas calibradas com resultados experimentais. Os ensaios experimentais que validam estes modelos consistem essencialmente na aplicação de forças de corte ao longo de superfícies de fractura previamente formadas, fazendo variar a abertura da fenda e o grau de confinamento. É numeroso o tipo de diferentes ensaios referidos na bibliografia (CEB 1996; Li et al. 1989).

Como já foi referido, em betões de resistência normal a fendilhação propaga-se essencialmente pela matriz cimentícia, contornando os agregados, originando um traçado altamente irregular para a superfície de fractura macroscópica. Quando é imposta uma força de corte ao longo de uma superfície de fractura já formada, os agregados são empurrados contra o seu negativo na matriz cimentícia na face oposta da fenda, e a transmissão de forças é gerada em numerosos pontos de contacto. Os agregados são mais rígidos e resistentes do que a matriz, ocorrendo esmagamento desta nas zonas de contacto, resultando num comportamento deformacional altamente inelástico. A rugosidade da fenda origina um comportamento dilatante que se manifesta da seguinte forma:

- Mantendo a tensão normal de confinamento σ constante, a imposição de uma tensão tangencial τ origina um deslocamento tangencial δ_t acompanhado de um aumento da abertura da fenda w .
- Mantendo w , a imposição de uma tensão tangencial τ origina um aumento da tensão normal de confinamento σ .

Com o aumento da abertura da fenda, as zonas de contacto entre as suas faces vão-se tornando mais reduzidas, pelo que a força de corte transmitida será tanto menor quanto maior for w . Por outro lado, para deslocamentos δ_t grandes, é de esperar uma maior degradação da interface, pelo que a força de corte transmitida deverá estabilizar, ou até diminuir, a partir de um certo valor de δ_t .

O fenómeno de engrenamento entre os agregados (“*aggregate interlock*”) é responsável pela transmissão de importantes forças de corte através de fendas macroscópicas com aberturas consideráveis (w maior que 0.1 mm), sendo determinante na correcta avaliação da capacidade

resistente de muitos tipos de estruturas. Dos modelos analíticos existentes para descrever o fenómeno da transferência de tensões de corte através de superfícies macroscópicas de fractura, apenas dois se baseiam numa interpretação física sob a forma de teoria estabelecida sobre a mecânica do “*aggregate interlock*”, são eles o *modelo das duas fases* (“*two phase model*”) (Walraven e Reinhardt 1981) e o *modelo da densidade de contacto* (“*contact density model*”) (Li et al. 1989). Para uma exaustiva revisão bibliográfica sobre os vários modelos existentes consultar (CEB 1996; Feenstra et al. 1991a; Li et al. 1989).

Modelo das duas fases

Este modelo baseia-se na consideração do betão como um material essencialmente constituído por duas fases distintas: a matriz de pasta de cimento e agregados finos e os agregados de maiores dimensões nela embebidos. O modelo considera que a rigidez de uma das fases, correspondente aos agregados, é muito superior à outra, pelo que se assume que apenas a fase correspondente à matriz cimentícia se deforma. Dada a sua porosidade, é de esperar que as deformações plásticas sejam predominantes, adoptando-se uma relação constitutiva rígido-plástica para a tensão de contacto entre a matriz e os agregados (*Figura 2.23 a*). Aumentando a tensão de corte τ sobre a fenda, e existindo uma tensão de confinamento σ que impeça a sua livre abertura, as faces da fenda tendem a deslizar, reduzindo a área total de contacto e aumentando significativamente as tensões nessas zonas. Para que o equilíbrio se mantenha, ocorre deformação plástica da matriz de forma a aumentar a área de contacto (*Figura 2.23 c*).

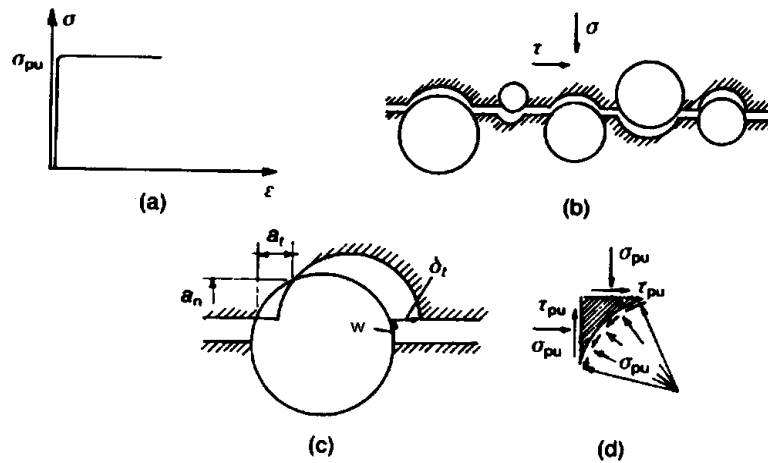


Figura 2.23 – “Two phase model” (CEB 1996): a) Relação rígido-plástica para a matriz; b) geometria simplificada da superfície da fenda; c) projecções da área de contacto entre a matriz e os agregados; d) tensões na área de contacto entre a matriz e os agregados.

As tensões nas zonas de contacto são decompostas na sua componente normal, σ_{pu} , e tangencial, τ_{pu} , relacionadas através do coeficiente de atrito μ :

$$\tau_{pu} = \mu \sigma_{pu} \quad (2.29)$$

A condição de equilíbrio de translação, segundo as direcções normal e tangencial à fenda, pode então ser estabelecida em cada unidade de contacto (*Figura 2.23 c) e d)*):

$$\begin{aligned} F_n &= \sigma_{pu} \cdot a_t - \tau_{pu} \cdot a_n \\ F_t &= \sigma_{pu} \cdot a_n + \tau_{pu} \cdot a_t \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para integrar as equações de equilíbrio ao longo de todo o plano de fractura é necessário calcular o integral das projecções das áreas de contacto a_t e a_n . Assumindo que a forma dos agregados é esférica e que a sua gradação segue a curva de distribuição acumulada de Fuller,

$$P = \sqrt{\frac{D}{D_{\max}}} \quad (2.31)$$

em que P é a probabilidade de ocorrência da existência de um agregado com diâmetro inferior a D , e D_{\max} é a máxima dimensão do agregado presente na mistura, é possível calcular a função densidade de probabilidade, $n(D)$, do número de intersecções de um agregado de diâmetro D com o plano da fractura.

Por outro lado, recorrendo ainda à hipótese de agregados esféricos, é possível calcular, através de relações geométricas, as projecções a_n e a_t da área de contacto de um agregado de diâmetro D com a pasta de cimento endurecida da outra face da fenda, em função de w e de δ_i , assim como os seus valores mais prováveis \bar{a}_n e \bar{a}_t .

Desta forma, se as faces da fenda se moveram relativamente uma à outra de (w, δ_i) , sendo D_{\min} o diâmetro mínimo de um agregado intersectado pela fenda que, para os deslocamentos considerados, ainda contacta com a outra face, a área total de contacto por unidade de área do plano da fenda pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum a_n = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \bar{a}_n dD \\ A_t &= \sum a_t = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \bar{a}_t dD \end{aligned} \quad (2.32)$$

A expressão analítica resultante para A_n e A_t é complexa e pode ser consultada em (Walraven e Reinhardt 1981).

Finalmente, integrando (2.30) e usando (2.32), chega-se às relações tensão-deslocamento ilustradas na *Figura 2.24* (note-se que A_n e A_t são funções de (w, δ_i)):

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_{pu} (A_t - \mu A_n) \\ \tau &= \sigma_{pu} (A_n + \mu A_t)\end{aligned}\quad (2.33)$$

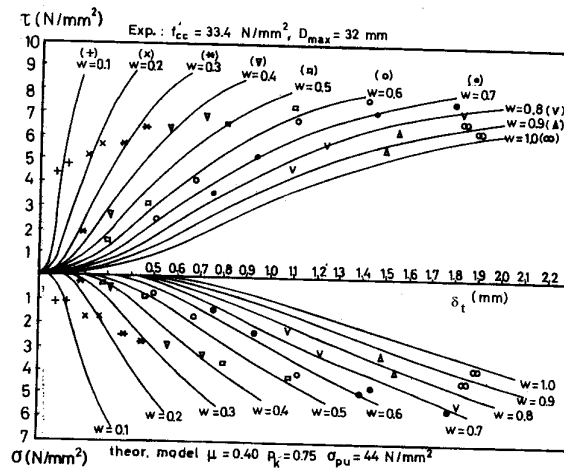


Figura 2.24 – Comparação do modelo teórico com os resultados experimentais (Walraven e Reinhardt 1981).

Este modelo foi entretanto generalizado no sentido de contemplar cargas cíclicas e cargas de longa duração (Pruissers 1988).

Modelo da densidade de contacto

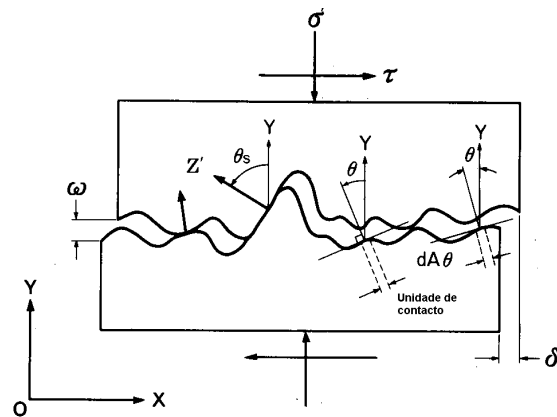


Figura 2.25 – “Contact density model”(Li et al. 1989).

O “*contact density model*” baseia-se essencialmente em duas propostas e três pressupostos que podem ser sumariados como se segue:

- Propostas
 1. Geometria da superfície de fractura – A complicada rugosidade da superfície de fractura pode ser dividida em áreas infinitesimais, as *unidades de contacto*, com várias inclinações θ , como se mostra na Figura 2.25. A área de uma unidade de contacto dA_θ ,

com inclinação entre θ e $\theta + d\theta$, pode ser obtida através de uma função de densidade de contacto $\Omega(\theta)$ de natureza estocástica e característica do material, que representa a distribuição direccional da superfície da fenda. Na expressão (2.34), A_t é a área total da fenda por unidade de área do seu plano.

$$dA_\theta = A_t \Omega(\theta) d\theta \quad (2.34)$$

2. Direcção das tensões de contacto – As tensões que se estabelecem nas unidades de contacto, são, na proposta original do modelo, consideradas perpendiculares à superfície sobre a qual se fazem sentir ($\theta = \theta_s$ na Figura 2.25). Esta simplificação foi no entanto deixada cair na generalização do modelo proposta em (Bujadham e Maekawa 1992a; Bujadham e Maekawa 1992b; Bujadham et al. 1992), para atender à modelação da transferência de tensões entre fendas sujeitas a condições de carregamento mais gerais do que as anteriormente consideradas.

- Pressupostos

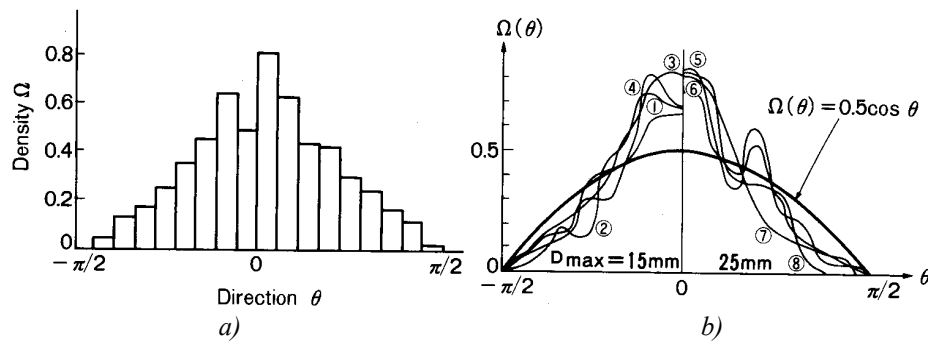


Figura 2.26 – Formulação da função densidade de contacto (Li et al. 1989): a) Histograma experimental da direcção de contacto θ entre faces; b) função densidade de contacto.

1. Função densidade de contacto – Com base na medição experimental da inclinação da direcção das unidades de contacto ao longo de uma linha do plano de fractura, é possível a construção do histograma da Figura 2.26 a). Suavizando os histogramas construídos a partir de medições efectuadas ao longo de diferentes linhas chega-se ao gráfico da Figura 2.26 b). A distribuição experimental das direcções de contacto é então aproximada pela função trigonométrica:

$$\Omega(\theta) = 0.5 \cos(\theta) \quad (2.35)$$

A função densidade de contacto é uma propriedade do material pelo que em betões de alta resistência, dada a menor rugosidade da superfície das fendas, é de esperar que $\Omega(\theta)$ seja diferente. Para este tipo de betões, estudos sobre a geometria da superfície de fractura (Bujadham e Maekawa 1992a) vieram a revelar a adequabilidade de uma distribuição normal truncada, da forma

$$\Omega(\theta) = \frac{5}{6} e^{-21\left(\frac{\theta}{\pi^2}\right)} \quad (2.36)$$

2. Modelo constitutivo para as tensões de contacto – Dada a dificuldade experimental em obter a relação constitutiva para as tensões de contacto, no modelo original considera-se uma relação elastoplástica entre a tensão normal à unidade de contacto $\sigma(\theta)$ e a projecção normal à unidade de contacto do deslocamento entre faces da fenda. Na generalização do modelo atrás referida, foi introduzido um parâmetro de anisotropia na lei elastoplástica, para considerar a influência da direcção de aplicação de carga na resposta deformacional, e ainda um parâmetro de redução da rigidez elástica função da história de deslocamentos tangenciais, este último com o objectivo de modelar a degradação da matriz em carregamentos cíclicos. Foi ainda definida uma lei de dependente da história do carregamento para as tensões tangenciais à unidade de contacto $\tau(\theta)$.
3. Rácio de contacto efectivo – A função densidade de contacto inclui o efeito da geometria da superfície da fenda, mas é óbvio que o contacto entre faces é mais reduzido se a sua abertura for grande. Com base nestas considerações, e em medições experimentais, verifica-se ser admissível tomar uma redução da área de contacto sob a forma da função exponencial (2.37). Nesta expressão, R é a rugosidade máxima da superfície da fenda, que para betões de resistência normal vale $0.5D_{\max}$ e para betões de alta resistência vale 3mm.

$$K(w) = 1 - e^{1 - \frac{R}{w}} \geq 0 \quad (2.37)$$

Com base nestas considerações, a formulação matemática das relações tensão/deslocamento pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \vec{\sigma}(\theta) + \vec{\tau}(\theta) \right\| \cos(\theta_s) K(w) A_t \Omega(\theta) d\theta \\ \tau &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \vec{\sigma}(\theta) + \vec{\tau}(\theta) \right\| \sin(\theta_s) K(w) A_t \Omega(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.38)$$

Com as modificações introduzidas em (Bujadham e Maekawa 1992a; Bujadham e Maekawa 1992b), e à custa da perda da simplicidade da proposta original de (Li et al. 1989), o modelo revela-se capaz de reproduzir com sucesso a transferência de tensões entre fendas sujeitas às mais complexas condições de carregamento decorrentes da aplicação de cargas cíclicas, conforme se atesta em (Bujadham et al. 1992). Por outro lado, com a correcta definição da

função densidade de contacto, este modelo permite estudar a transferência de tensões entre qualquer tipo de interface rugosa, tais como juntas de peças pré-fabricadas.

2.4 – FRACTURA POR COMPRESSÃO

Os ensaios de compressão sobre provetes cúbicos ou cilíndricos são talvez a forma mais divulgada de caracterização das propriedades do betão. São numerosas as correlações empíricas que fornecem estimativas de outros parâmetros a partir da resistência uniaxial de compressão f_c . No entanto, a obtenção de uma relação macroscópica tensão/extensão, mesmo em ensaios uniaxiais, não é uma tarefa simples, dado que a forma da curva é, em larga medida, dependente das condições fronteira impostas pela máquina de ensaio e da geometria e dimensões do provete ensaiado. A fricção entre os pratos da máquina de ensaio e o provete conduz a uma tensão de rotura dependente da dimensão, introduzindo um efeito de escala. Uma tensão de rotura mais elevada é medida quando a fricção aumenta e a esbelteza do provete diminui. Adicionalmente, a esbelteza do provete influencia a resposta pós pico, existindo evidência experimental que aponta no sentido da ocorrência de localização das deformações no ramo de amolecimento do diagrama (Jansen e Shah 1997; Van Mier 1986). Estes fenómenos também ocorrem em testes triaxiais (Van Mier 1998), sendo grande a dispersão dos resultados obtidos quando se mudam as técnicas de ensaio. Por outro lado, a velocidade de ensaio, a forma de aplicação de carga - imposição de forças ou de deslocamentos (*Figura 2.27*) - e a direcção de aplicação de carga - perpendicular ou paralela à superfície de betonagem (Van Mier 1986) - são factores que também têm influência no diagrama obtido, impedindo a comparação directa de muitos resultados. Uma discussão aprofundada da influência das técnicas de ensaio na forma de rotura dos provetes e correspondentes curvas tensão/extensão, pode ser encontrada em (Gerstle et al. 1980; Kotsovos e Pavlovic 1995; Nelissen 1972; Van Mier 1986).

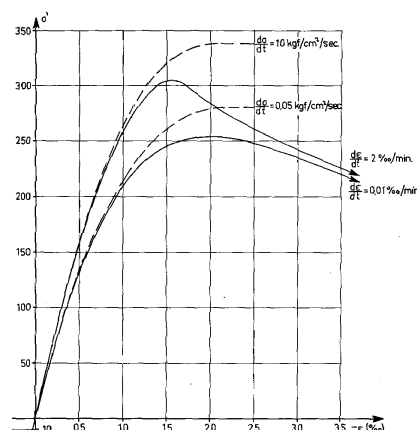


Figura 2.27 – Influência da velocidade e do processo de aplicação de carga no diagrama tensão/extensão uniaxial (adaptado de Nelissen (1972)).

2.4.1 – Processo de fractura em compressão

Dada a heterogeneidade do betão, a aplicação de um estado de tensão uniforme e uniaxial resulta num estado de tensão local multiaxial e não uniforme, cuja caracterização é difícil de estabelecer. Atendendo a este facto, e segundo Kotsovos e Pavlovic (1995), o processo de fractura do betão poderá ser subdividido em duas categorias distintas:

- Processos de fractura sob estados de tensão não hidrostáticos, caracterizados por terem uma orientação definida. A direcção das tensões locais máximas é, em média, coincidente com a direcção da tensão principal de compressão aplicada.
- Processos de fractura sob estados de tensão hidrostáticos, caracterizados pelo carácter aleatório da orientação da fractura, no sentido em que a sua direcção de propagação não é definível, assim como a orientação do estado local de tensão.

2.4.1.1 - Processo de fractura sob um estado de tensão não hidrostático (tensor de desvio não nulo)

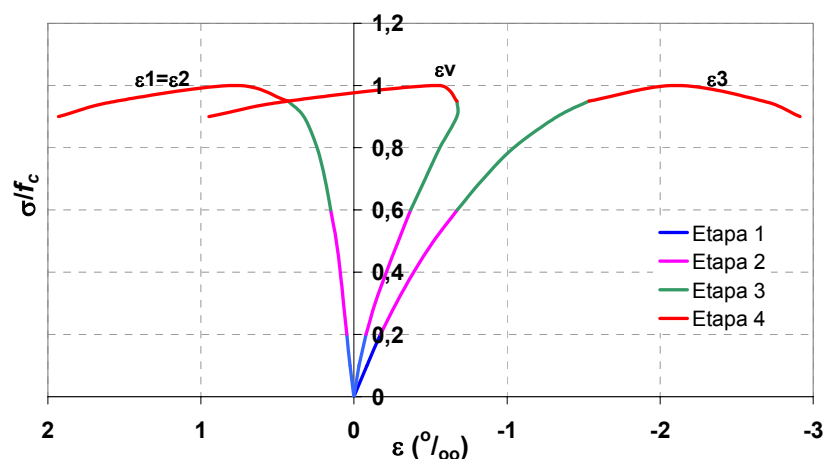


Figura 2.28 – Etapas do processo de fractura por compressão e o seu efeito nas relações tensão/extensão num ensaio uniaxial.

Tipicamente é possível identificar quatro etapas distintas no andamento dos diagramas representados na Figura 2.28:

- Etapa 1 – Numa primeira fase, o comportamento macroscópico pode ser descrito recorrendo à teoria da elasticidade linear. Antes da aplicação da carga, já existe no betão um número significativo de microfendas na interface pasta de cimento/agregados, cuja origem está associada a tensões de tracção auto-equilibradas resultantes de variações de volume sofridas pela pasta de cimento. Nesta fase, microfendas adicionais podem formar-se em pontos isolados onde as concentrações de tracções devidas a deformações

incompatíveis entre a pasta de cimento (mais flexível) e os agregados (mais rígidos) é mais elevada, contudo, as microfendas não se propagam e permanecem estáveis.

- Etapa 2 – À medida que a carga vai aumentando, assiste-se a uma diminuição do declive da curva σ_3 - ε_3 , associado a uma diminuição inelástica de volume. Nesta fase desenvolvem-se grandes concentrações de tensões de tracção na extremidade das microfendas, o que as leva a iniciar o processo de ramificação na direcção da tensão principal de compressão, dissipando energia elástica acumulada. A diminuição inelástica de volume é explicada pelo alívio das concentrações de extensões de tracção, o que leva a contracções do material nestas zonas localizadas (Kotsovos e Pavlovic 1995), sobrepondo-se este efeito ao da criação de vazios decorrente da ramificação das fendas. Outros autores referem que a diminuição inelástica do volume é marcada pelo esmagamento da estrutura microporosa que envolve os agregados. A fendilhação existente não é ainda visível a olho nu, concentrando-se ainda na interface agregados/pasta de cimento (Bongers e Rutten 1998). Este facto permite postular que apenas existe dano sensível na interface porosa (“bond zone”), permitindo assimilar o andamento dos ciclos carga/descarga representados na *Figura 2.29* ao modelo da *Figura 2.30*.

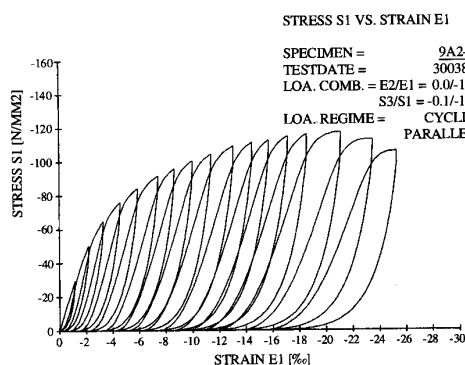


Figura 2.29 – Ensaio cíclico de compressão multiaxial. (Van Mier 1984) segundo (Bongers e Rutten 1998).

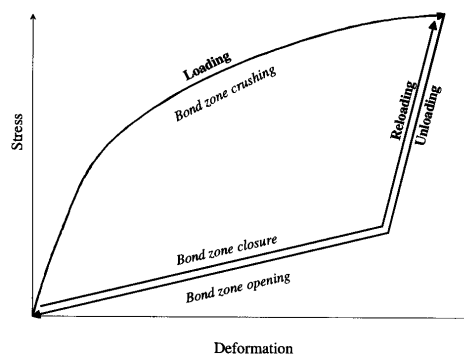


Figura 2.30 – Ciclo de carga, descarga e recarga (Bongers e Rutten 1998).

- Etapa 3 – Nesta fase as fendas atrás referidas propagam-se de forma estável através da matriz cimentícia, no sentido em que mantendo constante o nível de carga, cessa a propagação das fendas. Em betões de resistência normal, a resistência dos agregados é superior à da pasta de cimento, pelo que a propagação das fendas se dá segundo o mecanismo 3, representado na *Figura 2.31*. Na matriz formada pela pasta de cimento endurecida as fendas propagam-se na direcção da tensão principal de compressão, enquanto que na interface com os agregados a propagação segue uma direcção oblíqua (Choi e Shah 1998).

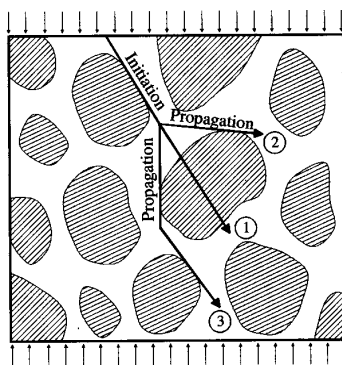


Figura 2.31 – Mecanismo de propagação de fendas. O mecanismo 1 prevê o atravessamento dos grãos de agregado. No mecanismo 2 a propagação dá-se pelo lado comprimido do grão de agregado e no mecanismo 3 pelo lado traccionado. Retirado de (Bongers e Rutten 1998).

- Etapa 4 – No início desta fase é atingido o volume mínimo do material, após o qual se observa um comportamento dilatante, resultado da formação de vazios decorrente da ramificação instável das fendas, sobrepondo-se este efeito a qualquer outro no sentido da compactação volumétrica. A carga máxima é obtida quando a propagação das fendas prossegue até formar um sistema de fendas instável, resultado da união de várias fendas mais pequenas (Figura 2.32), segundo uma trajectória irregular. O sistema de fendas torna-se instável, na medida em que mantendo constante o nível de carga ocorre propagação das fendas até rotura. Após a carga máxima é observado um ramo de amolecimento, traduzido por uma localização das deformações ao longo duma zona onde a fractura se processa e por um estado de tensão altamente não uniforme ao longo do provete. Na Figura 2.33 ilustram-se três diagramas σ - ε resultantes de ensaios de compressão uniaxial sobre provetes com diferentes alturas. As deformações pós-pico são mais elevadas nos provetes menos esbeltos. Na Figura 2.34 estão representados os diagramas que relacionam a tensão aplicada com o deslocamento pós-pico, sendo evidente a menor dispersão dos resultados, o que indica que as deformações estão localizadas numa zona do provete, reflectindo as extensões da Figura 2.33 a disseminação deste deslocamento localizado por um comprimento de medida diferente.

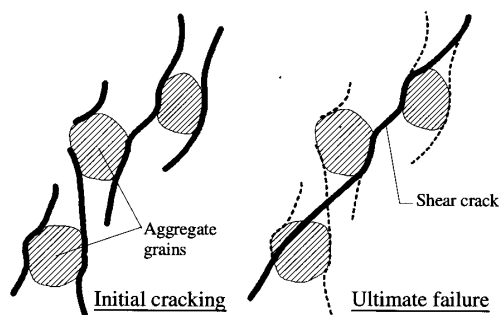


Figura 2.32 – Formação de uma fenda macroscópica através do efeito de ponte entre fendas. A maioria das fendas contorna os agregados, existindo algumas que os atravessam. Retirado de (Bongers e Rutten 1998).

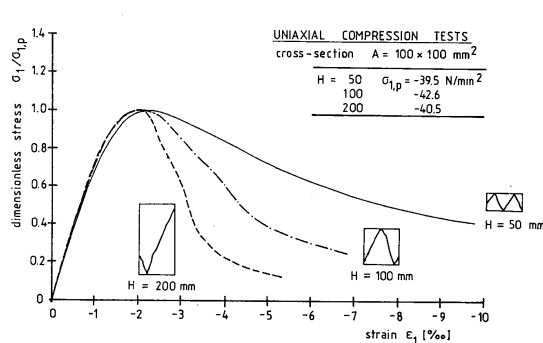


Figura 2.33 – Influência da altura do provete na curva tensão/extensão uniaxial. Retirado de (Van Mier 1986).

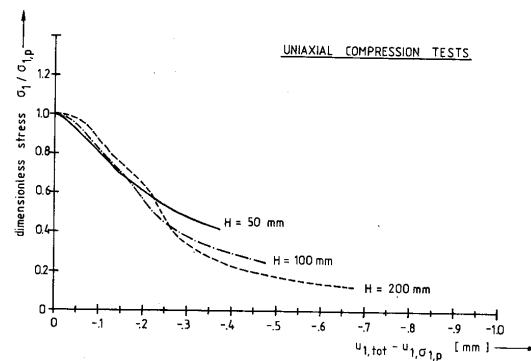


Figura 2.34 – Deslocamentos pós-pico para os três provetes da Figura 2.33. Retirado de (Van Mier 1986).

2.4.1.2 - Influência da componente hidrostática do tensor das tensões no processo de fractura.

De acordo com (Kotsovos e Pavlovic 1995), num estado de tensão puramente hidrostático, à excepção do carácter aleatório da sua orientação, o processo de fractura segue essencialmente as 3 primeiras etapas referidas na secção anterior. Devido a esta aleatoriedade, a probabilidade de uma fenda atravessar a trajectória de propagação de uma outra fenda é grande, actuando como um inibidor do processo de fractura, aumentando a energia necessária para desencadear o processo de propagação. O número destes “inibidores” aumenta com o nível de tensão instalado, pelo que é realista assumir que os processos de propagação das fendas, como os anteriormente referidos, possam diminuir sob o efeito da componente hidrostática do estado de tensão. Na prática, e a um nível macroscópico, a aplicação duma tensão hidrostática aumenta a isotropia do betão.

Um outro aspecto a tomar em consideração está ilustrado na Figura 2.35. Ocorrendo a propagação das fendas de acordo com o mecanismo 3 da Figura 2.31, e dado o carácter friccional do betão, a existência de uma tensão de confinamento origina um estado de tensão local ao longo das superfícies da fenda menos favorável à sua propagação (Bongers e Rutten 1998).

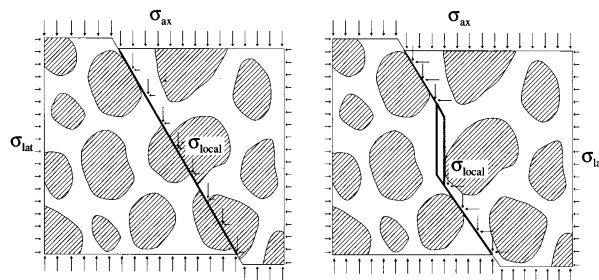


Figura 2.35 – Tensões locais actuando sobre a superfície de uma fenda em compressão multiaxial. Retirado de (Bongers e Rutten 1998).

2.4.2 – Superfície de rotura.

No espaço das tensões, o lugar definido por todas as combinações de tensões para as quais um dado provete de betão carregado de forma proporcional atinge a carga máxima é designado por superfície de rotura (ou envolvente de rotura).

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.39)$$

É uma simplificação conveniente assumir que uma superfície de rotura definida para carregamentos proporcionais pode ainda ser usada para condições de carregamento mais genéricas, mas verifica-se que é um procedimento razoável (CEB 1996). Nestas circunstâncias a dispersão dos resultados experimentais é maior do que qualquer variação sistemática da superfície de rotura que possa ser atribuída às diferentes trajectórias de tensão (Kotsovos e Pavlovic 1995). Em ensaios biaxiais, Maekawa e Okamura (1983) evidenciaram que também se pode definir uma envolvente de rotura no espaço das extensões, e que também esta é independente da trajectória de carga. No entanto, em ensaios uniaxiais e triaxiais de provetes sobre os quais se exerceram pré-cargas multiaxiais, atingiram-se diferentes valores para a carga de rotura consoante o valor da pré-carga (Bongers e Rutten (1998) citando Van Geel (1998)). Esta dependência só foi detectada em carregamentos altamente não proporcionais e para valores muito elevados da pré-carga.

Também se admite sistematicamente que a superfície de rotura é isotrópica. Van Mier (1986) reportou a existência de uma anisotropia inicial relacionada com a direcção de betonagem dos provetes. No entanto, esta anisotropia reflectiu-se predominantemente no comportamento deformacional, nomeadamente na extensão de pico, e não na capacidade de carga dos provetes.

Usualmente, e de forma a permitir uma melhor compreensão física e geométrica da superfície de rotura, e dada a hipótese de isotropia, a sua forma funcional é expressa à custa dos invariantes do tensor das tensões, de acordo com equação (2.40), em termos das tensões octaédricas e do ângulo de similaridade, conforme a equação (2.41), ou ainda, nas coordenadas cilíndricas (ξ, r, θ) , de acordo com a equação (2.42). Em (Chen 1982) encontra-se a interpretação de cada um destes parâmetros.

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.40)$$

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = 0 \quad (2.41)$$

$$f(\xi, r, \theta) = 0 \quad (2.42)$$

Na *Figura 2.36* está representada a intersecção da superfície de rotura do betão com o plano hidrostático. Os meridianos assim obtidos definem completamente a envolvente de rotura para

estados de tensão axissimétricos, dada a hipótese de isotropia. Na figura estão ainda representados os diferentes modos de rotura associados ao maior ou menor grau de confinamento. Abaixo dos pontos de transição (TP), o processo de fractura segue as quatro etapas anteriormente definidas, ocorrendo localização da fractura associada ao amolecimento das curvas tensão/extensão. Acima dos pontos de transição, o nível da tensão hidrostática é suficiente para que a fractura ocorra de forma dúctil, sem localização e sem degradação do nível de tensão aplicado. A envolvente de rotura é aberta para os níveis de tensão atingidos pelas actuais máquinas de ensaio, e também para as tensões passíveis de ocorrerem em situações práticas.

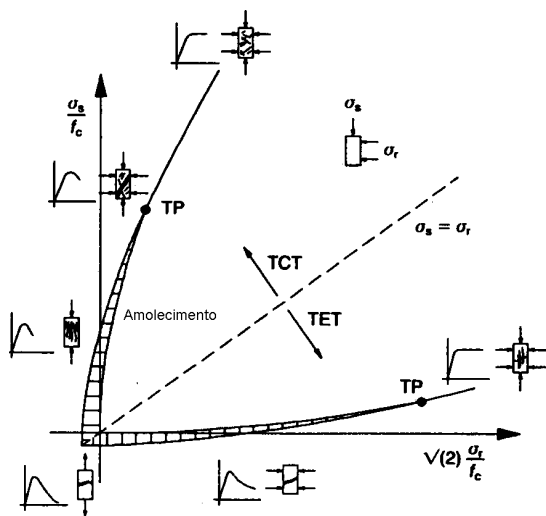


Figura 2.36 – Meridianos de compressão e de tracção. Diferentes modos de fractura. (Pramono e Willam 1989)

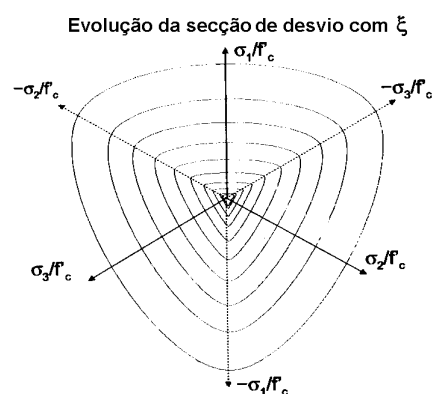


Figura 2.37 – Evolução da secção octaédrica com a tensão hidrostática (Kang e Willam 1999).

O efeito da tensão principal intermédia pode ser obtido por observação da intersecção da superfície de rotura com os planos octaédricos correspondentes aos diferentes níveis de tensão hidrostática. Para níveis baixos da componente hidrostática esta intersecção tem uma forma triangular, aproximando-se progressivamente de uma circunferência com o evoluir do grau de confinamento (Figura 2.37).

Na Figura 2.38 está ilustrada a delimitação de cada uma etapas do processo de fractura referidas em 2.4.1 no espaço das tensões e das extensões principais.

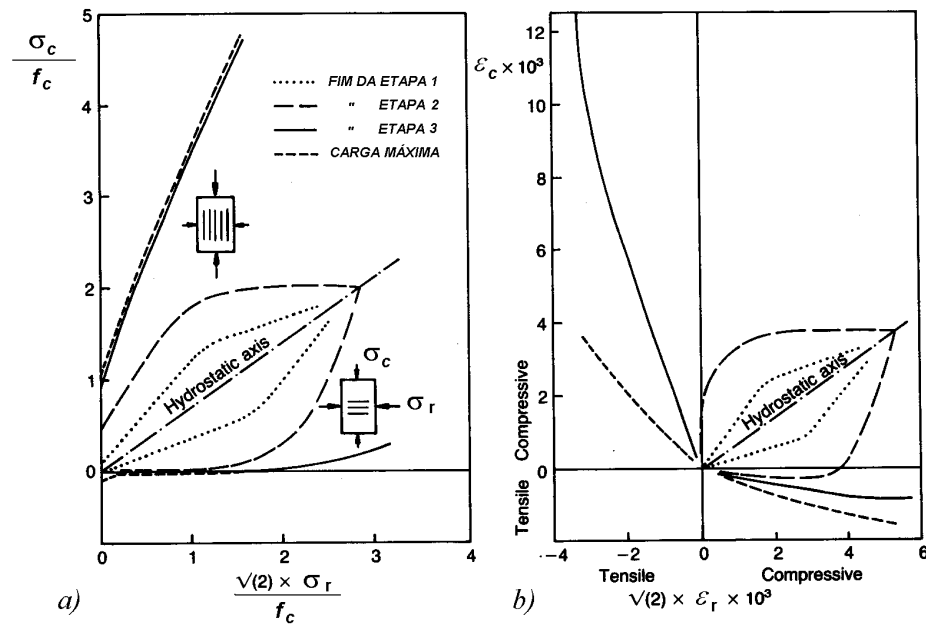


Figura 2.38 – Envolventes típicas das etapas do processo de fractura do betão quando sujeito a estados de tensão axissimétricos (adaptado de Kotsovos e Pavlovic (1995)): a) espaço das tensões b) espaço das extensões.

Para estados de tensão biaxiais, a intersecção da superfície com um dos planos $\sigma_i = 0$, define uma envolvente do tipo da representada na Figura 2.39. Os diferentes modos de rotura observados neste tipo de ensaios estão representados na Figura 2.40.

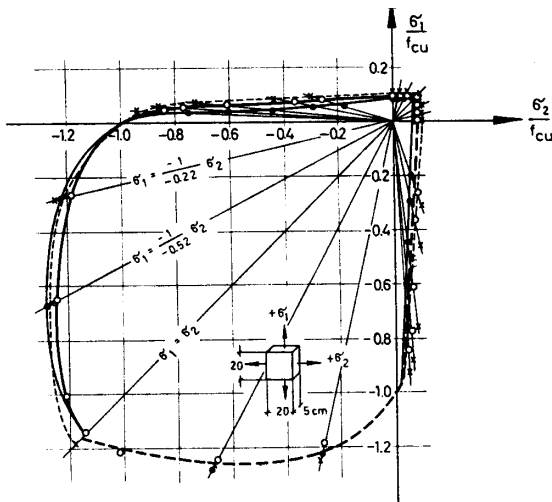


Figura 2.39 – Envolvente de rotura em estados de tensão biaxiais (Kupfer e Gerstle 1973).

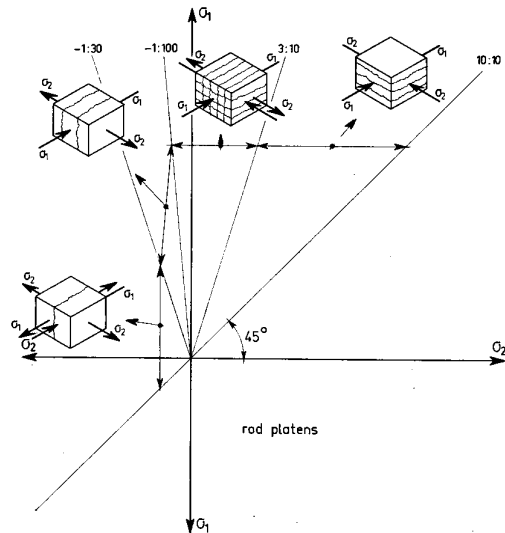


Figura 2.40 – Diferentes modos de rotura em ensaios biaxiais (Nelissen 1972).

Em (Chen 1982) apresenta-se a formulação de algumas das envolventes de rotura mais utilizadas e a respectiva comparação com resultados experimentais.

2.4.3 – Comportamento deformacional.

De um extenso projecto experimental envolvendo vários laboratórios a nível mundial desenvolvido no final da década de 70 (CEB 1996; Gerstle et al. 1980; Kotsovos e Pavlovic 1995), resultaram importantes conclusões acerca do comportamento deformacional do betão:

- Mesmo utilizando métodos de ensaio bem estabelecidos, é sempre de esperar uma significativa dispersão nas curvas tensão/extensão medidas;
- O comportamento deformacional do betão pode ser expresso convenientemente à custa dos dois primeiros invariantes dos tensores das tensões e das deformações (valores octaédricos). A hipótese de isotropia (independência das leis de comportamento do ângulo de similaridade θ , ou equivalentemente, do terceiro invariante do tensor das tensões de desvio J_3) é satisfatória até níveis de tensão próximos da rotura.
- A relação entre tensões e extensões volumétricas e de desvio é ditada por dois módulos independentes: K , o módulo de compressibilidade volumétrica, e G , o módulo de distorção.
- Um efeito de acoplamento entre a tensão de corte octaédrica τ_o e a extensão volumétrica ε_o é sistematicamente observado, e pode ser descrito à custa da introdução de um módulo de acoplamento H .

Do que foi acima exposto é possível estabelecer as relações (2.43) e (2.44), onde a extensão volumétrica é dividida na componente originada pela tensão hidrostática (ε_o^h) e na componente originada pela tensão de desvio (ε_o^d):

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_o \\ d\gamma_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3K} & \frac{1}{H} \\ 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_o \\ d\tau_o \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_o^h &= \frac{d\sigma_o}{3K} \\ d\varepsilon_o^d &= \frac{d\tau_o}{H} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os resultados dos testes evidenciam que a relação $\sigma_o - \varepsilon_o^h$ é não linear, dependendo apenas da resistência à compressão uniaxial do betão f_c (*Figura 2.41*), tendo-se mostrado independente do nível de tensão de desvio aplicado. Testes cíclicos revelaram ainda que, na descarga e na recarga, o declive da curva, para pontos suficientemente afastados da carga última, é

aproximadamente igual ao valor inicial K_0 , reduzindo-se acentuadamente a partir da Etapa 4 do processo de fractura.

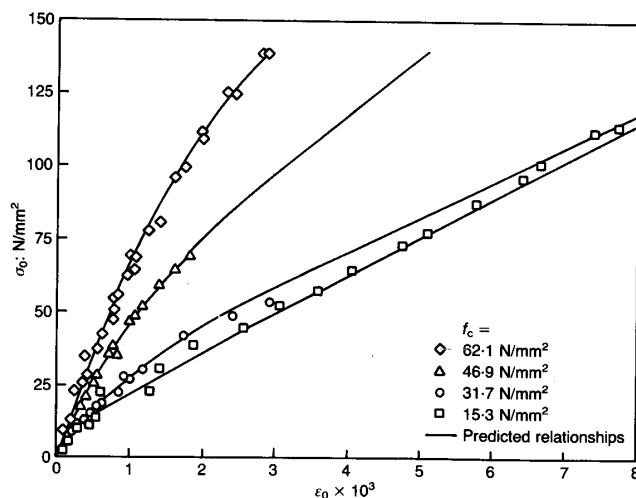


Figura 2.41 – Relações $\sigma_0 - \epsilon_0^h$ experimentais para vários tipos de betão (Kotsovos e Pavlovic 1995).

A relação $\tau_0 - \gamma_0$ é igualmente não linear, evidenciando dependência de f_c , conforme atesta a Figura 2.42. Até se atingir o ponto de volume mínimo (início da Etapa 4 do processo de fractura sob estados de tensão não hidrostáticos), o nível de tensão hidrostática não exerce qualquer influência sobre a relação $\tau_0 - \gamma_0$, podendo esta ser estabelecida à custa de uma expressão independente de σ_0 . A partir desse ponto a dependência de σ_0 está ilustrada na Figura 2.43, sendo o nível máximo de distorção fortemente influenciado pela tensão hidrostática. O comportamento em ciclos carga e descarga é essencialmente igual ao evidenciado pela relação $\sigma_0 - \epsilon_0^h$.

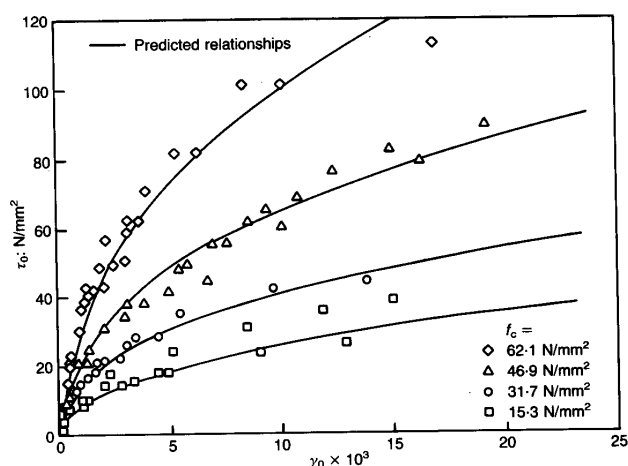


Figura 2.42 – Relações $\tau_0 - \gamma_0$ experimentais para vários tipos de betão. Adaptado de Kotsovos e Pavlovic (1995).

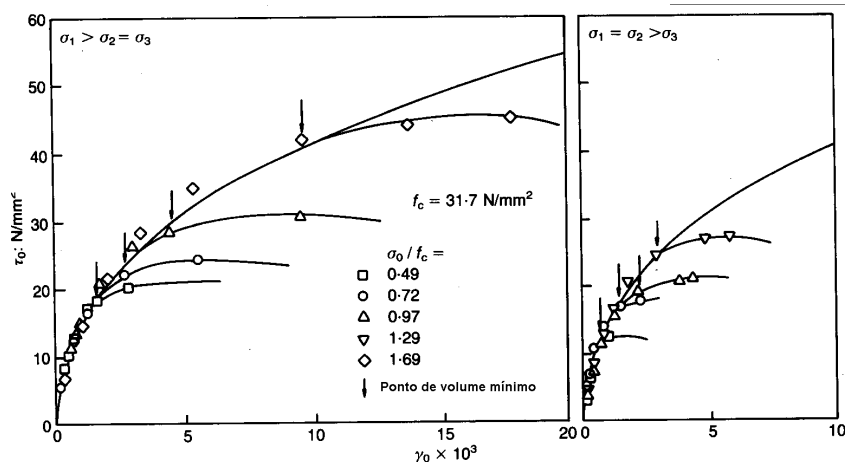


Figura 2.43 – Relações $\tau_0 - \gamma_0$ experimentais para vários níveis de σ_0 . Adaptado de Kotsovos e Pavlovic (1995).

No que concerne à relação $\tau_0 - \varepsilon_0^d$, verifica-se uma dependência acentuada da tensão hidrostática para qualquer nível de τ_0 aplicado, conforme se pode aferir na Figura 2.44. O ponto de volume mínimo é ainda marcado por uma súbita alteração da curva, experimentando o material um comportamento dilatante sob o efeito de τ_0 . O comportamento em ciclos carga/descarga é diferente do evidenciado pelas relações atrás mencionadas. Com efeito, a deformação ε_0^d é totalmente irreversível, sendo vertical o declive da curva na descarga/recarga, já que na recarga não ocorre distorção enquanto o nível de tensão de corte não iguala o anteriormente atingido.

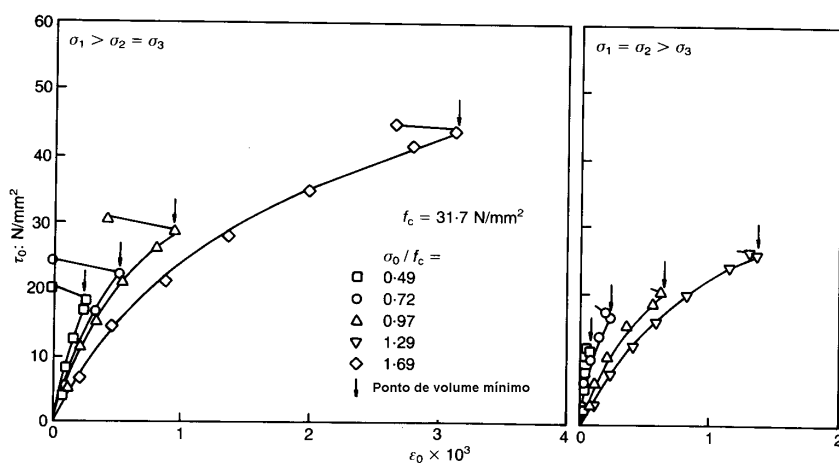


Figura 2.44 – Relações $\tau_0 - \varepsilon_0^d$ experimentais para vários níveis de σ_0 . Adaptado de Kotsovos e Pavlovic (1995).

Testes efectuados com recurso a trajectórias de tensão complexas procuraram estabelecer o critério mais adequado para distinguir situações de carga, descarga ou recarga, em condições mais gerais do que as anteriormente referidas. Uma situação de carga parece ocorrer, com consequente comportamento inelástico, sempre que uma (ou mais) das tensões principais excede um valor previamente atingido (CEB 1996). Maekawa e Okamura (1983) fundamentaram, por sua vez, com base em ensaios biaxiais, que é possível definir uma

envolvente no espaço das extensões que define o lugar dos estados de extensão reversíveis, cuja violação conduz a deformações irreversíveis. Demonstraram ainda que esta envolvente expande e se move cinematicamente no espaço $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ (Figura 2.45).

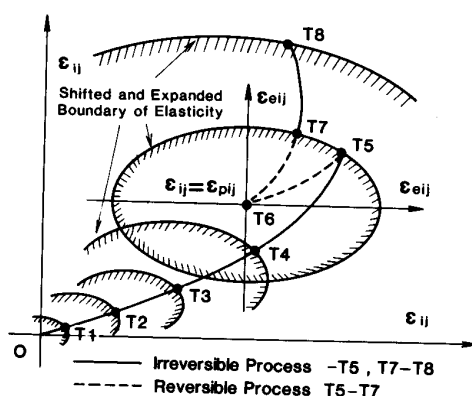


Figura 2.45 – Envolvente 2D dos estados de extensão reversíveis (Maekawa e Okamura 1983).

A modelação do comportamento de amolecimento verificado na Etapa 4 do processo de fractura, para os níveis de tensão hidrostática em que esse tipo de comportamento ocorre, não está ainda estabelecido de forma satisfatória. Não existe ainda consenso acerca da definição duma zona de processamento da fractura. Apenas em ensaios uniaxiais sobre provetes cilíndricos existe algum consenso em afirmar que a região onde se localiza a fractura se situa a toda a largura do provete e com um desenvolvimento em altura com cerca de $3d$ (d - diâmetro do cilindro) (Jansen e Shah 1997). Alguns autores (Kotsovos e Pavlovic 1995) argumentam que o estado de tensão local nesta fase não é definível, pelo que afirmam que o ramo de amolecimento não é uma propriedade intrínseca do material, mas antes dependente do provete utilizado e da interacção com os aparelhos de ensaio. Jansen e Shah (1997) apresentaram resultados sobre provetes cilíndricos de várias alturas que conduzem à aplicação de conceitos originários da Mecânica da Fractura Não Linear no estudo de uma relação macroscópica de amolecimento no betão comprimido. Com base num modelo de interpretação muito simples (Figura 2.46 e Figura 2.47), conceptualmente semelhante ao modelo da fenda fictícia usualmente utilizado no estudo do betão traccionado, conseguiram quantificar de forma satisfatória um valor de G_c , definido como uma energia de fractura em compressão, demonstrando a sua constância para provetes cilíndricos de várias alturas. Contudo não foi ainda demonstrado que este valor se mantém em ensaios sobre provetes de formas diversas e com estados de tensão mais complexos, de modo a poder considerar G_c uma propriedade material.

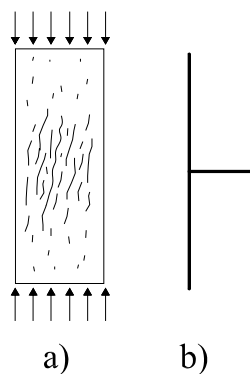


Figura 2.46 – Modelo para localização da fractura em compressão uniaxial: a) Padrão experimental de fendas; b) Concentração do dano num plano perpendicular à tensão de compressão.

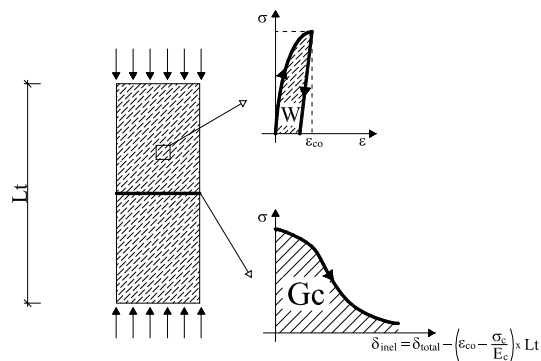


Figura 2.47 – Modelo para interpretação do fenómeno de localização baseado no conceito de concentração do dano num plano perpendicular à tensão de compressão.

Segundo o modelo utilizado e ilustrado na Figura 2.47, a energia de fractura em compressão G_c (Joule/m²) define-se como a energia dissipada por unidade de área no plano onde se assume que a fractura se processa até a tensão aplicada se anular. A energia dissipada ao longo de todo o provete nas Etapas 1, 2 e 3 do processo de fractura é traduzida por W (Joule/m³).

2.5 – ADERÊNCIA ARMADURAS/BETÃO

A aderência entre as armaduras e o betão é um fenómeno multifacetado, que permite que as forças sejam transferidas da armadura para o betão circundante. A correcta interpretação da mecânica subjacente a esta transferência de tensões é fundamental para a correcta reprodução da rigidez de estruturas de betão armado durante a fase de serviço e para evitar uma das potenciais fontes de fragilidade na rotura, que é precisamente a insuficiente amarração das armaduras. Por outro lado, no cálculo de estruturas sujeitas à acção sísmica, requisitos de ordem económica levam a que estas sejam projectadas para dissipar energia de forma controlada em determinadas zonas, que no caso de estruturas reticuladas são, por exemplo, as rótulas plásticas. Só um profundo conhecimento do comportamento da interacção aço/betão quando sujeito a cargas cíclicas permite determinar a resistência, ductilidade e extensão destas zonas.

Os ensaios experimentais com vista ao estudo deste fenómeno são numerosos, remetendo-se a sua referência para a bibliografia (fib 1999a; fib 2000; Maekawa et al. 2003; Shima et al. 1987).

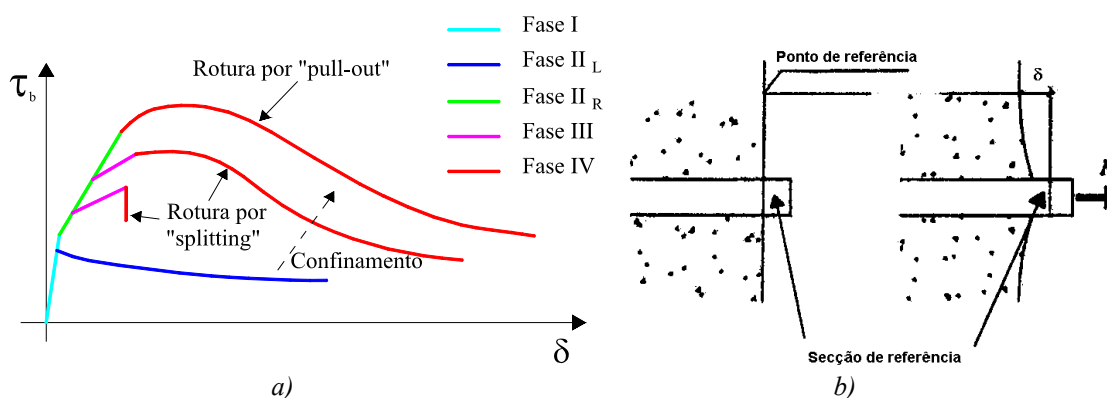


Figura 2.48 – a) Curvas tensão de aderência/deslocamento relativo (“bond stress-slip law”); b) definição do deslocamento relativo δ (fib 2000).

Um resultado típico deste tipo de ensaios é uma curva como a representada na Figura 2.48 a). No eixo das ordenadas surge a tensão de aderência τ_b , que é a força média transmitida do varão para o betão por unidade de superfície do varão. No eixo das abcissas tem-se o deslocamento δ , que corresponde ao deslocamento relativo entre uma secção de referência no varão e um ponto no betão não perturbado (Figura 2.48 b)). Tipicamente é possível identificar quatro fases distintas no andamento do diagrama τ – δ em ensaios de aderência com varões rugosos e duas em ensaios com varões lisos, a que correspondem diferentes processos físicos (fib 1999a; fib 2000):

Varões lisos

- Fase I – Quando a aderência é activada, e para valores baixos de τ_b , a transmissão de forças é assegurada por adesão química entre a superfície do varão e a pasta de cimento. A adesão química é ainda acompanhada por uma interacção micromecânica motivada pela rugosidade microscópica do aço. Esta fase corresponde à fase elástica, e o deslocamento relativo medido é apenas resultado de deformações localizadas no betão nas proximidades do varão (Figura 2.48 b)).
- Fase II_L – Após rotura da adesão química, a segunda fase no processo de transferência de forças é garantida por um mecanismo de atrito seco. Para varões com níveis de rugosidade muito baixa, a superfície de escorregamento coincide com a superfície do varão, enquanto que se considera que atravessa a camada cimentícia que o envolve, se um certo nível de rugosidade for atingido. As compressões radiais que permitem o desenvolvimento das forças atríticas são causadas pela retracção do betão circundante e a rugosidade da superfície de deslizamento. Devido ao desgaste desta, as tensões de compressão radial diminuem com o evoluir do deslocamento δ , assim como a tensão τ .

Varões rugosos

- Fase I – Nesta fase os fenómenos envolvidos são em tudo iguais aos já referidos para os varões lisos.

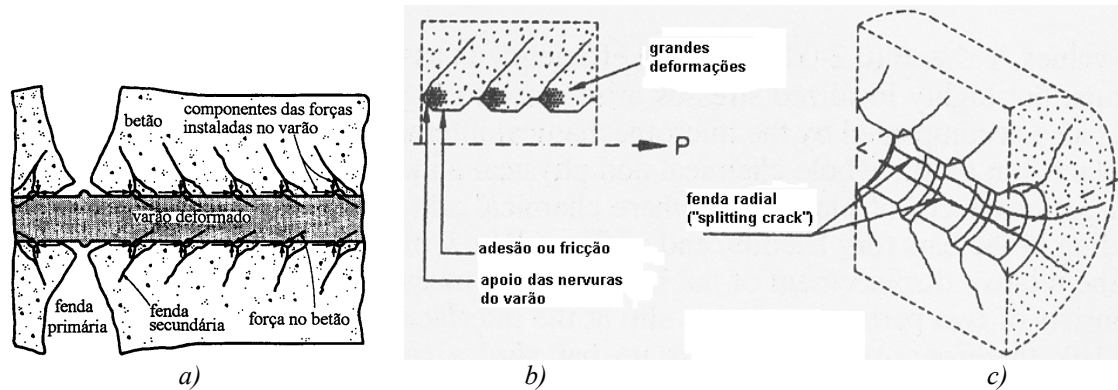


Figura 2.49 – Mecanismo de transferência de tensões.

- Fase II_R – No caso de varões rugosos, após a rotura da adesão química, as nervuras do varão induzem elevadas tensões de contacto no betão, levando à ocorrência de fendas secundárias em forma de cone (Figura 2.49 a)) e provocando esmagamento localizado do betão, conforme ilustrado na Figura 2.49 b)). As tensões de contacto são transferidas ao betão circundante pelas escoras de betão entre fendas secundárias, e podem ser decompostas em duas componentes. A soma das componentes segundo o eixo do varão é a força de aderência, enquanto que as componentes radiais induzem tracções circunferenciais no betão envolvente.
- Fase III – O início desta fase é marcado pela formação de fendas radiais (“*splitting cracks*”) associadas às tensões circunferenciais atrás referidas (Figura 2.49 c)). O mecanismo resistente continua a ser assegurado pelo engrenamento no betão circundante das escoras de betão entre fendas secundárias.
- Fase IV – No caso de o confinamento conferido pelo betão envolvente ao varão não ser suficiente, ocorre uma rotura frágil com propagação das fendas radiais até à superfície do betão (“*splitting failure*”). A tensão de aderência máxima atinge-se quando as fendas radiais penetraram em cerca de 70% da espessura de recobrimento. A continuação da propagação das fendas origina um decréscimo da tensão, e quando estas chegam à superfície a tensão desce abruptamente. Caso o confinamento seja suficiente, ocorre uma rotura mais dúctil, com passagem do mecanismo resistente característico da fase III para um mecanismo friccional, que tem início com a rotura por corte do betão entre fendas secundárias (“*pull out failure*”). Esta passagem é igualmente marcada por um decréscimo da tensão de aderência e dá-se para deslocamentos relativos que podem não ser aceitáveis do ponto de vista estrutural ($\delta/\phi > 0.05$, ϕ diâmetro do varão). Forma-se

uma superfície de escorregamento que envolve as nervuras do varão, cujo desgaste com o evoluir do deslocamento relativo leva também à redução da força transmitida até um valor residual.

O confinamento pode ser assegurado à custa de um recobrimento elevado, e/ou disposição de uma elevada percentagem de armadura transversal (confinamento passivo), ou ainda através forças exteriores perpendiculares ao varão (confinamento activo). Para uma completa discussão acerca dos vários factores que influenciam a aderência, tais como o tipo de confinamento, a qualidade do betão, a geometria das rugosidades dos varões, a corrosão da armadura, as altas temperaturas e a velocidade de aplicação da carga, consultar (fib 2000).

Sob acções cíclicas, a aderência entre as armaduras e o betão sofre uma acentuada deterioração, que pode levar à rotura para tensões de aderência inferiores do que os obtidos sob cargas monotónicas. A deterioração da rigidez e da resistência é mais severa em ensaios cíclicos em que existe inversão do sentido das tensões de aderência. Uma descrição detalhada do comportamento mecânico que origina os diagramas τ - δ ilustrados na *Figura 2.50* encontra-se em (fib 2000), podendo-se afirmar que a deterioração da resistência e da rigidez é tanto mais acentuada quanto maior for o nível de deslocamento relativo máximo previamente atingido e o número de ciclos.

Existem várias propostas para as relações τ - δ , podendo ser consultadas na bibliografia (CEB 1993; CEB 1996; fib 1999a; fib 2000; Shima et al. 1987).

Deve-se realçar que a relação τ - δ representa um comportamento estrutural que pode ser estudado a diferentes escalas de observação, dependendo do volume de controlo sobre o qual é homogeneizado o campo de deslocamentos. Na *Figura 2.51* está ilustrada uma proposta de classificação das abordagens à modelação do fenómeno da aderência (Maekawa et al. 2003). No nível mais baixo são usados conceitos da mecânica da fractura (Maekawa et al. 2003; Rots 1989) directamente aplicáveis à fenomenologia envolvida e atrás descrita. Estes modelos, usualmente baseados em modelações numéricas por elementos finitos de ensaios experimentais, servem para esclarecer o funcionamento da transferência de tensões observada experimentalmente e também para validar os modelos do nível seguinte, estes já aplicáveis na análise estrutural. Permitem ainda o estudo de fenómenos ainda não totalmente esclarecidos, tal como o efeito de escala. É assim a um nível intermédio que surge a relação τ - δ , resultado da integração dos campos de tensão e extensão sobre um domínio contendo várias nervuras e fendas secundárias, e cuja vantagem reside na versatilidade e pouca limitação no âmbito de aplicação. Regra geral, a curva será, essencialmente, dependente do comprimento de embebimento do varão e do confinamento existente, para além, naturalmente, do tipo de betão e de armadura. A um nível macroscópico, se se tomar como volume de controlo uma região contendo várias fendas primárias e secundárias, o comportamento do material betão fendilhado

com armadura pode ser estudado na sua globalidade, considerando-o como um material compósito.

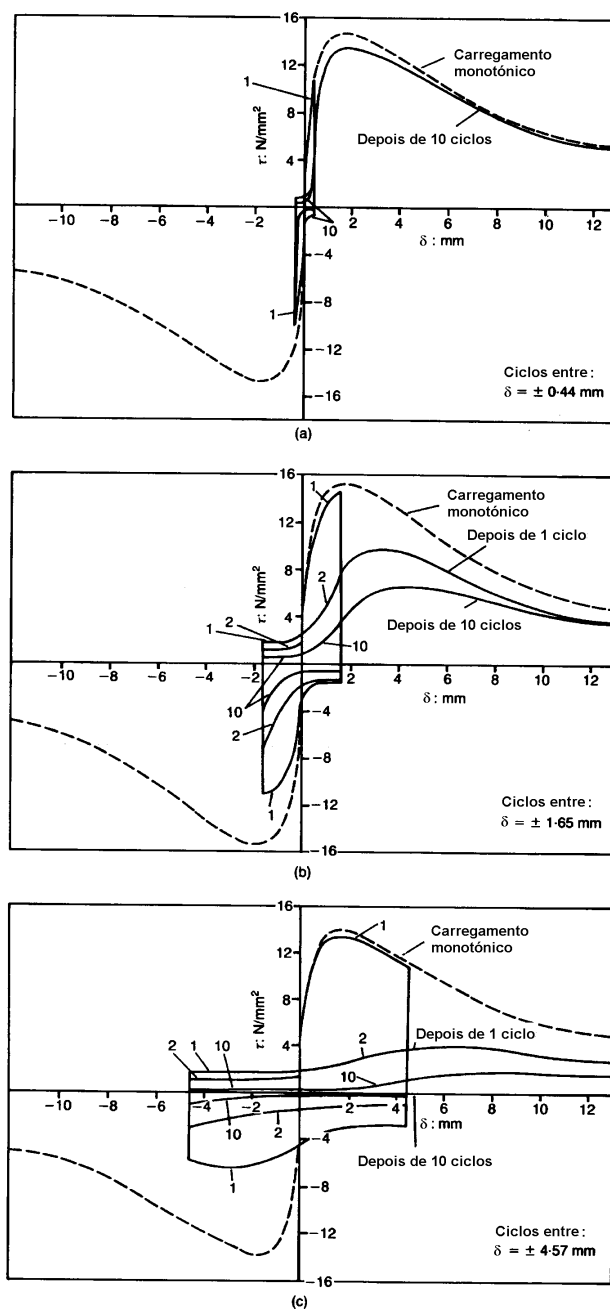


Figura 2.50 – Curvas "bond-slip" para cargas cíclicas com diferentes amplitudes de ciclo.

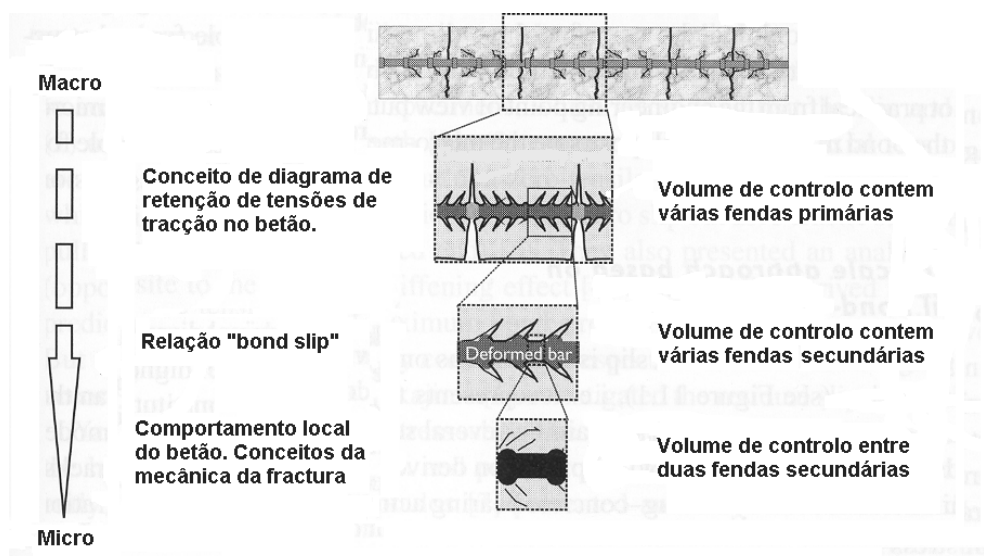


Figura 2.51 – Hierarquia na modelação do fenómeno da aderência. Adaptado de (Maekawa et al. 2003).

2.6 – BETÃO ARMADO FENDILHADO – UM MATERIAL COMPÓSITO

A um nível macroscópico de análise, em que o volume de controlo para formulação das relações constitutivas encerra várias fendas primárias (ver Figura 2.51), o betão armado fendilhado apresenta características de rigidez e de resistência distintas das que seriam expectáveis através da simples soma das contribuições das armaduras e do betão. Se o nível da análise for sendo sucessivamente refinado, tomando volumes de controlo sucessivamente mais reduzidos, este comportamento surge como um resultado natural da mecânica não linear dos constituintes, betão e armadura. No entanto, em aplicações correntes de análise estrutural, nomeadamente no contexto da análise numérica do comportamento estrutural global, esse refinamento é impraticável devido ao elevado custo computacional envolvido, pelo que se torna necessário o desenvolvimento de teorias que traduzam o comportamento compósito macroscópico observado. Obviamente que a poupança em esforço computacional é traduzida por uma perda de generalidade e ganho em complexidade conceptual das formulações. A seguir expõem-se os conceitos e as teorias que foram sendo desenvolvidas no sentido de formular leis constitutivas para o material betão armado fendilhado.

2.6.1 - Retenção de tensões de tracção no betão (“tension stiffening”)

Na presença de armadura aderente em quantidade suficiente, a fractura do betão sujeito a esforços de tracção deixa de ser um fenómeno localizado. A um nível macroscópico o fenómeno de amolecimento deixa de se verificar e todas as questões relacionadas com a localização das deformações, a objectividade dos resultados e os efeitos de escala são eliminados. A armadura

mínima necessária para que isto se verifique deve ser tal que consiga estabilizar o processo de fissuração, garantindo um espaçamento regular das fissuras.

Um ensaio de tracção a um tirante de betão armado nestas condições conduz a uma curva carga-deformação que, de uma forma geral, se assemelha à que está representada na *Figura 2.52*. Podem ser identificadas três fases distintas no comportamento evidenciado:

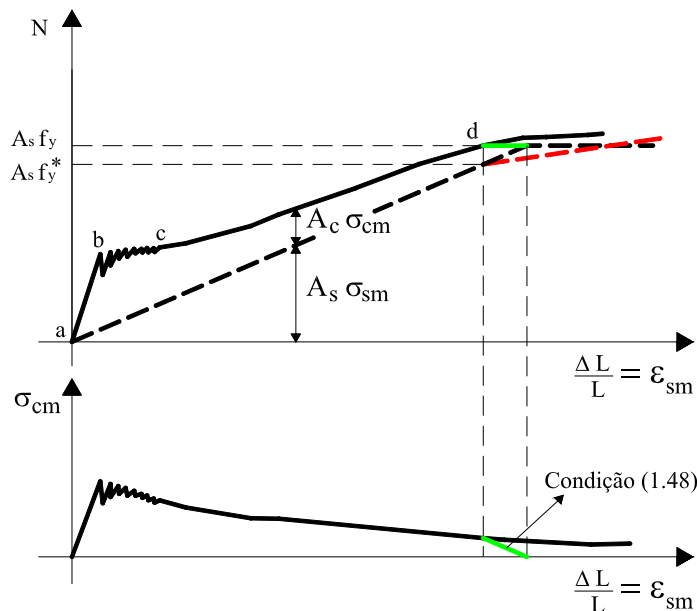


Figura 2.52 – Curva carga-deformação resultante de um ensaio de um tirante de betão armado. Determinação do diagrama de retenção de tensões de tracção com base em ensaios experimentais sobre elementos estruturais.

- Fase não fendilhada (tramo a-b) – Antes de se atingir a tensão de resistência à tracção, f_{ct} , o tirante apresenta a sua rigidez máxima, resultante do comportamento perfeitamente aderente entre as armaduras e o betão.
- Fase de formação de fendas (tramo b-c) – Na vizinhança da primeira fenda, a distribuição de extensões e tensões na armadura e no betão, assim como as tensões de aderência que se desenvolvem devido ao deslizamento relativo entre estes, estão ilustrados na *Figura 2.53*. A uma distância igual ao comprimento máximo de aderência $l_{s,max}$ o deslizamento entre o betão e o aço anula-se, fazendo com que $\sigma_c(l_{s,max}) = f_{ct}$. A referida armadura mínima é usualmente calculada de forma a garantir que não ocorre cedência na secção onde surge a fissura e pode ser expressa a partir de (2.45). Num ensaio realizado com controlo de deformação, por cada nova fenda que se forma a carga aplicada decresce ligeiramente, originando o aspecto dentado evidenciado pelo tramo b-c da curva da *Figura 2.52*.

$$\rho_{MIN} = \frac{1}{\frac{f_y}{f_{ct}} - \alpha} \approx \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (2.45)$$

com $\rho = \frac{A_s}{A_c}$ e $\alpha = \frac{E_s}{E_c}$

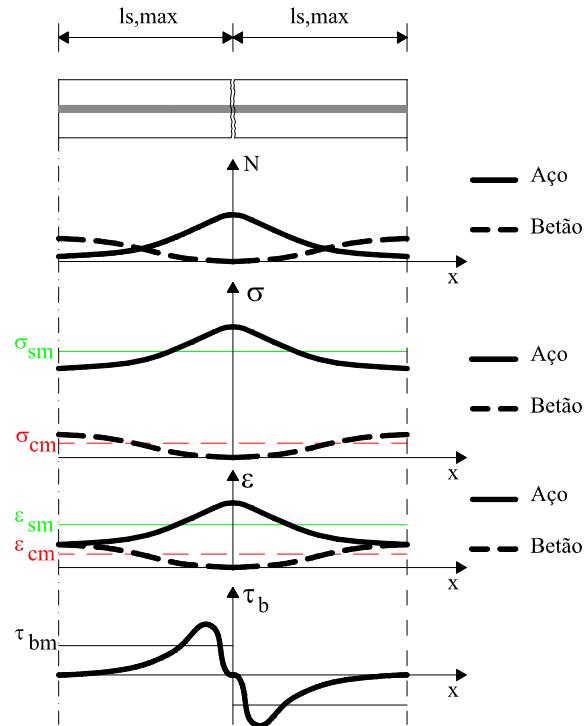


Figura 2.53 – Distribuição das extensões, tensões e esforços numa vizinhança da primeira fenda.

- Fase de fendilhação estabilizada (tramo c-d) – Nesta fase todas as fendas estão já formadas, verificando-se apenas a evolução da sua abertura. A rigidez exibida pelo tirante é superior à correspondente à acção isolada das armaduras (daí a designação de “tension stiffening”).
- Fase de cedência das armaduras – nas secções fissuradas as armaduras atingem a tensão de cedência f_y (ponto d).

A fenomenologia atrás descrita pode ser reproduzida atribuindo ao betão o acréscimo de rigidez observado através de um diagrama de retenção de tensões de tracção no betão (Figura 2.52). Este diagrama relaciona a tensão média no betão σ_{cm} com a extensão média do tirante ϵ_{sm} (que é igual à extensão média da armadura), e traduz a contribuição do betão entre fissuras para a rigidez da estrutura.

Uma forma de obter este diagrama é baseada na determinação de σ_{cm} a partir de ensaios experimentais sobre elementos estruturais, tais como tirantes ou painéis sujeitos a condições de

carregamento mais complexas envolvendo esforços de corte, com consequente formação de fendas inclinadas. Exemplos deste tipo de abordagem são os trabalhos das escolas de Toronto (Vecchio e Collins 1986), de Houston (Belarbi e Hsu 1994) e de Tóquio (Shima et al. 1987).

Observando a *Figura 2.53*, da condição de equilíbrio das forças na direcção perpendicular às fendas (neste caso coincidente com a direcção da armadura) tem-se $N(0) = N(x)$ de onde se obtém a expressão (2.46),

$$\sigma_s(0) = \sigma_s(x) + \frac{1}{\rho} \sigma_c(x) \quad (2.46)$$

A igualdade (2.46) é válida para cada ponto x , pelo que também se verificará em termos de tensões médias, obtendo-se (2.47). Levando em consideração que $\sigma_s(0) = N/A_s$ e que $\sigma_{sm} = \varepsilon_{sm} E_s$, chega-se à expressão (2.48), que permite obter o diagrama de retenção de tracções no betão a partir dos resultados medidos experimentalmente. Note-se que A_c , ρ e E_s são quantidades conhecidas, o esforço N é medido e a extensão média ε_{sm} obtém-se fazendo $\varepsilon_{sm} = \Delta L / L$.

$$\sigma_s(0) = \sigma_{sm} + \frac{1}{\rho} \sigma_{cm} \quad (2.47)$$

$$\sigma_{cm} = \frac{N}{A_c} - \rho E_s \varepsilon_{sm} \quad (2.48)$$

Quando a armadura atinge a cedência nas secções fissuradas, a equação (2.47) permite obter:

$$f_y = f_y^* + \frac{1}{\rho} \sigma_{cm} \quad (2.49)$$

Dado que o objectivo desta análise é a obtenção de leis constitutivas válidas sobre um volume de controlo que abarca várias fissuras, os parâmetros intervenientes devem resultar de médias espaciais sobre o referido volume, tais como ε_{sm} e σ_{cm} . A tensão f_y^* é assim a tensão média no aço para a qual ocorre a cedência nas secções fissuradas, sendo dependente do diagrama de retenção de tensões considerado. Em (Belarbi e Hsu 1994; Hsu e Zhang 1996) e (Maekawa et al. 2003) são expostas duas formulações para a relação constitutiva da armadura em valores médios, incluindo as fases de cedência e endurecimento. Contudo, muitas das formulações existentes foram estabelecidas com base na tensão de cedência local da armadura f_y , sendo necessário garantir que o esforço total no tirante não excede a força máxima que a armadura consegue transmitir nas secções fissuradas, à custa, no entanto, de um menor rigor conceptual e de uma menor precisão na reprodução do comportamento estrutural na fase de cedência e endurecimento das armaduras (Hsu e Zhang 1996; Maekawa et al. 2003). Isso é garantido impondo a condição (2.50).

$$\sigma_{cm} \leq \rho(f_y - \sigma_{sm}) \quad (2.50)$$

Uma outra abordagem ao estudo do “*tension stiffening*” baseia-se na reprodução dos campos de tensões e extensões locais ao longo do volume de controlo através de leis simplificadas e/ou empíricas, obtendo por integração as leis constitutivas médias. Esta é a via seguida no CEB-FIP Model Code 1990 (CEB 1993; fib 1999a). Uma revisão de várias formulações existentes pode ser encontrada em (Barros 1995). Apenas no intuito de ilustrar esta abordagem apresenta-se em seguida um procedimento genérico de obtenção de um diagrama de retenção de tensões no betão.

Aquando da formação da primeira fenda a distribuição de extensões e tensões locais na armadura e no betão estão ilustradas esquematicamente na *Figura 2.53*. A tensão média no betão nesta fase vale $\sigma_{cm} = \beta f_{ct}$, sendo β um coeficiente de integração relacionado com a forma da distribuição local de tensões σ_c . Por exemplo, assumindo para $\sigma_c(x)$ uma distribuição parabólica com tangente horizontal no ponto de deslizamento nulo, resulta um valor de $\beta=2/3$. Alternativamente, considerando uma lei perfeitamente plástica para as tensões de aderência τ_b , a distribuição $\sigma_c(x)$ é linear, pelo que nestas circunstâncias $\beta=1/2$. No CEB-FIP Model Code 1990 adopta-se o valor $\beta=0.60$. Este parâmetro β é de fundamental importância na medida em que traduz o equilíbrio após a formação da primeira fenda. Uma aproximação possível ao diagrama de retenção será então a representada na *Figura 2.54 a)*, em que se adopta um decaimento linear da retenção de tensões no betão após a primeira fenda, traduzindo grosseiramente e de forma conservativa a degradação da aderência com o evoluir da extensão. A adopção de $\sigma_{cm}(\varepsilon_{sy})=0$ destina-se a garantir a satisfação da condição (2.50). A extensão correspondente ao final da fase de formação de fendas é obtida por equilíbrio e impondo a compatibilidade de deformações decorrente do diagrama $\sigma_{cm}(\varepsilon_{sm})$:

$$\varepsilon_{f2} = \frac{f_{ct} (1 + \alpha \rho) \left(\varepsilon_{sy} - \frac{f_{ct}}{E_c} \right) - \beta f_{ct} \varepsilon_{sm,u}}{\rho E_s \left(\varepsilon_{sy} - \frac{f_{ct}}{E_c} \right) - \beta f_{ct}} \quad (2.51)$$

Por outro lado na fase de fendilhação estabilizada o espaçamento médio entre fendas s_{rm} está compreendido entre $l_{s,max}$ e $2 l_{s,max}$, podendo genericamente ser expresso como $s_{rm} = \eta 2 l_{s,max}$, em que $0.5 < \eta < 1$. Nestas circunstâncias, e desprezando a degradação da aderência com o evoluir da extensão obtém-se $\sigma_{cm} = \beta \eta f_{ct}$, dando origem ao diagrama da *Figura 2.54 b)*. No CEB-FIP Model Code 1990 adopta-se o valor $\beta \eta = 0.40$ (a que corresponde $s_{rm} = 4/3 l_{s,max}$). Com estes pressupostos a extensão correspondente ao final da fase de formação de fendas vem dada por:

$$\varepsilon_{f2} = \frac{f_{ct}(1 - \beta\eta + \alpha)}{E_s \rho} \quad (2.52)$$

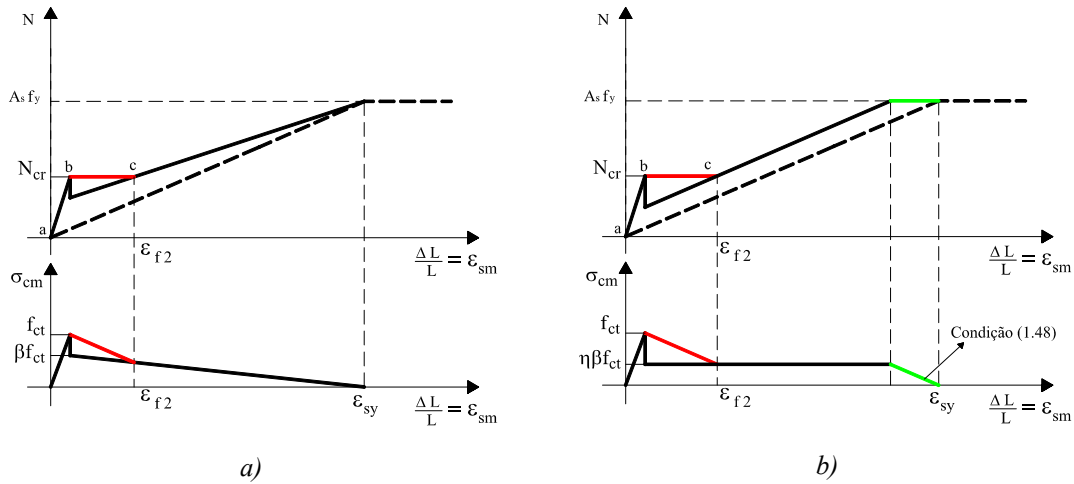


Figura 2.54 – Diagramas de retenção de tensões no betão.

Durante a fase de formação de fendas é dissipada energia de fractura. Utilizando o modelo da banda fendilhada é possível enquadrar os conceitos da mecânica fractura no estudo do “tension stiffening”. Considerando a largura da banda h superior ao espaçamento médio entre fendas s_{rm} , na presença de armadura superior à mínima, pode-se quantificar grosseiramente a energia de fractura dissipada através da expressão (2.53). A fase de formação de fendas termina quando toda a energia de fractura se tiver dissipado. Na Figura 2.55 ilustra-se o procedimento para um diagrama de amolecimento linear ao qual se adiciona um diagrama de retenção trilinear.

$$G_{F,rc} = G_F \frac{h}{s_{rm}} \quad (2.53)$$

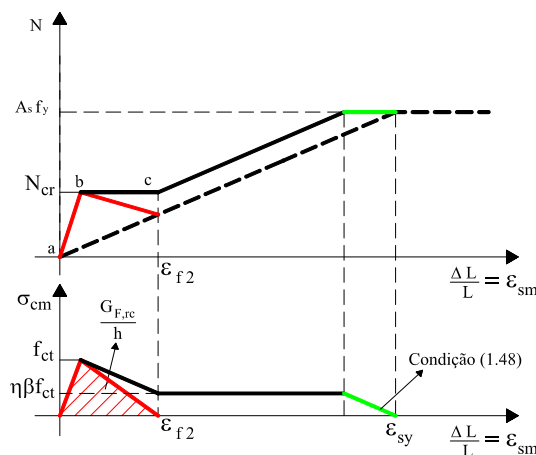


Figura 2.55 – Introdução da energia de fractura dissipada na fase de formação de fendas.

Até aqui todos os conceitos foram introduzidos para o caso uniaxial. No caso mais corrente em estruturas de betão armado temos 2 feixes de armaduras, geralmente perpendiculares entre si, existindo fendas não ortogonais à direcção das armaduras. Nestes casos é possível adaptar as

relações constitutivas expostas, adaptando-as ao conceito de armadura equivalente, ou formulando directamente equações de equilíbrio na direcção de cada uma das armaduras. A este respeito consultar (Barros 1995).

2.6.2 - Redução da resistência à compressão com a fendilhação

Extensos estudos experimentais sobre painéis de betão armado sujeitos a estados de tensão biaxial revelaram que na presença de um padrão de fendilhação regular, e paralelo à direcção das tensões principais de compressão, a rotura por compressão $f_{c2,max}$ ocorre para uma tensão inferior à tensão de rotura uniaxial f_c (Vecchio e Collins 1986),

$$f_{c2,max} = \omega_\sigma f_c, \quad \omega_\sigma \leq 1.0 \quad (2.54)$$

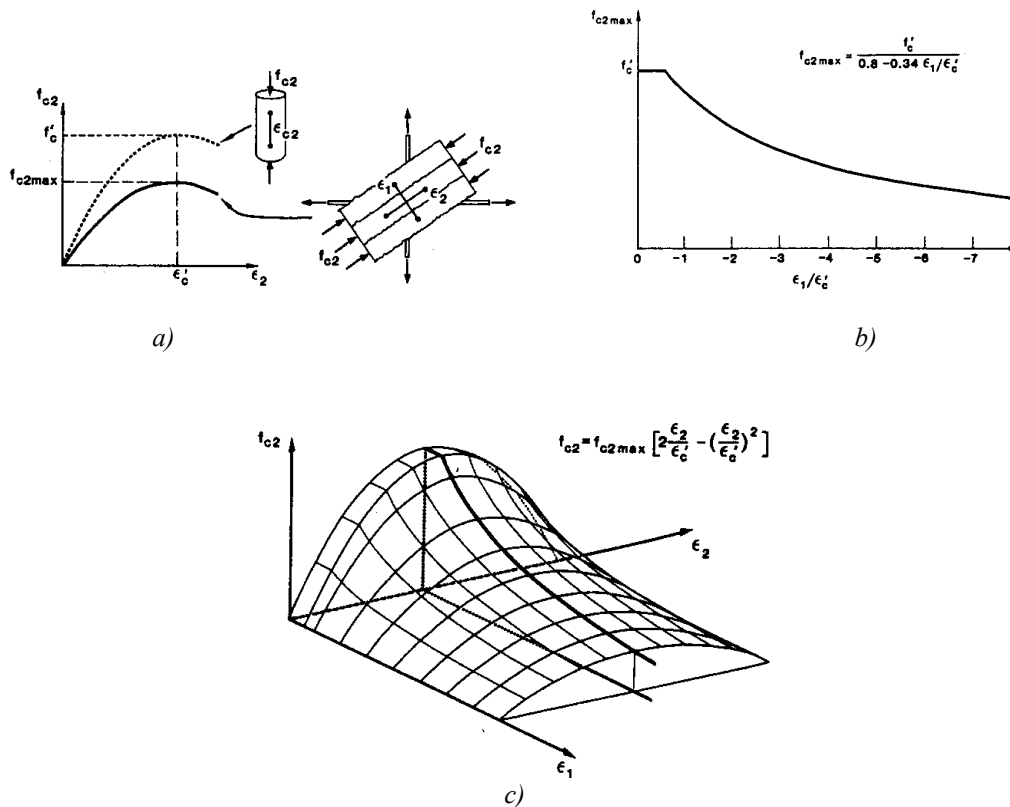


Figura 2.56 – a) Curva tensão/extensão para o betão fendilhado comprimido. b) Redução da tensão de compressão máxima com a extensão transversal. c) Representação tridimensional da relação/tensão proposta por (Vecchio e Collins 1986).

No estudo desenvolvido por (Belarbi e Hsu 1995) verificou-se que na região de compressão-tracção da envolvente de rotura biaxial, o factor de redução ω_σ é função principalmente da extensão transversal de tracção ϵ_1 (Figura 2.56), mas também do modo de aplicação da carga. A extensão correspondente à tensão máxima $\epsilon_{c2,max}$ é também menor do que a correspondente extensão de pico uniaxial ϵ_c , nomeadamente no caso de carregamentos proporcionais, pelo que,

$$\varepsilon_{c2,\max} = \omega_\varepsilon \varepsilon_c, \quad \omega_\varepsilon \leq 1.0 \quad (2.55)$$

tomando-se muitas vezes, simplificadamente, $\omega_\sigma = \omega_\varepsilon$.

A justificação para este fenómeno pode ser encontrada no carácter altamente irregular do campo de tensões do betão fendilhado. Devido à forma tortuosa das fendas, ditada pela natureza heterogénea do betão, a idealização de um sistema de escoras uniformemente comprimidas separadas por fendas aproximadamente rectas não é consistente com os padrões de fendilhação observados experimentalmente. Desta forma, a consideração de leis constitutivas estabelecidas com base nos valores médios, medidos sobre um volume de controlo suficientemente grande, tem de tomar em consideração a ocorrência de valores extremos de compressões localizadas, que eventualmente ditam a rotura do elemento estrutural (*Figura 2.57*).

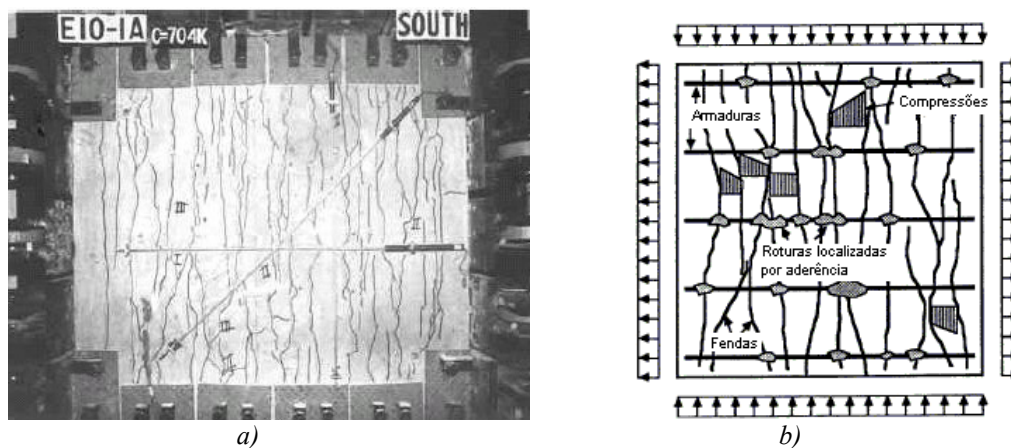


Figura 2.57 – a) Padrão de fendilhação de um painel de betão armado sujeito a um estado de compressão-tracção. b) Excentricidade das tensões nas escoras (Belarbi e Hsu 1995).

O procedimento conducente à obtenção destas relações consiste na aplicação de um estado de tensão uniforme a painéis de betão armado e medição da sua resposta deformacional. Através das três equações de equilíbrio de forças, das equações de compatibilidade de deformações, assumindo uma lei constitutiva para o aço e postulando que a direcção das tensões e extensões principais médias do painel é coincidente, obtém-se a lei constitutiva para o betão fendilhado (Vecchio e Collins 1986). Várias propostas têm sido apresentadas para o factor de redução ω_σ , sendo, no entanto, necessário ter em atenção os pressupostos tidos na sua obtenção. Conforme reconhecido por (Vecchio 2000), a coaxialidade entre as tensões e as extensões principais médias é um pressuposto que simplifica a obtenção e o uso corrente das leis constitutivas. Porém, a existência de escorregamentos localizados ao longo das fissuras faz com que essa coaxialidade, em geral, não se verifique. Desta forma, as deformações médias de um dado painel contêm também o efeito dos referidos escorregamentos, obtendo-se extensões “aparentes” superiores às efectivamente instaladas no betão.

No caso de formulações em que não se força a coaxialidade entre as tensões e as extensões principais médias, estes escorregamentos são calculados a partir de relações independentes, como por exemplo, as expostas em 2.3, e a adopção dos factores de redução da resistência à compressão determinados com base no pressuposto da coaxialidade não é directamente aplicável. Desta forma, esses factores devem ser corrigidos para ter em conta o facto de que nem toda a redução de rigidez deve ser atribuída à existência de extensões transversais, pois a introdução dos escorregamentos por corte entre as faces das fendas nas equações de compatibilidade introduz por si só um acréscimo de deformabilidade (Vecchio 2000). Nestas circunstâncias o factor ω_σ deve ser obtido directamente a partir de ensaios em que a direcção das tensões principais tenha permanecido constante. Este facto é particularmente importante no âmbito da simulação computacional, pois alerta para a necessidade de usar diferentes factores de redução ω_σ , conforme se utilizem modelos de fendas fixas ou modelos de fendas rotativas.

Neste contexto destacam-se as propostas de (Belarbi e Hsu 1995; Cervenka 1985; Cervenka et al. 2002; Hsu e Zhu 2002; Okamura e Maekawa 1991; Vecchio 2000; Vecchio e Collins 1986; Vecchio e Collins 1993) para o coeficiente de redução ω_σ , algumas das quais, nomeadamente as que são função apenas da extensão transversal, estão representadas na Figura 2.58.

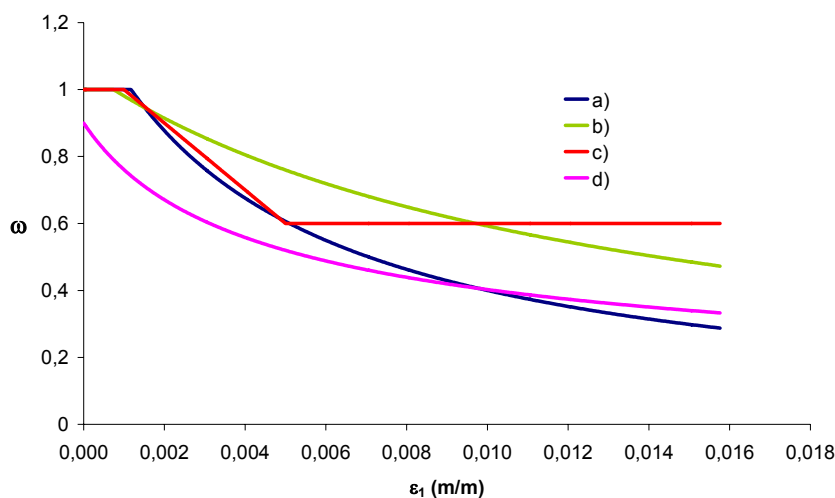


Figura 2.58 – Propostas para o factor de redução da resistência à compressão do betão fendilhado β_σ : a) (Vecchio e Collins 1986); b) (Vecchio 2000); c) (Okamura e Maekawa 1991); d) (Belarbi e Hsu 1995).

2.6.3 - Efeito de cavilha (“dowel action”)

O efeito de cavilha proporcionado pelas armaduras é um fenómeno que permite a transmissão de forças de corte entre as faces de fendas macroscópicas (Figura 2.59 a)). Ao contrário do “aggregate interlock”, o efeito de cavilha é essencialmente uma propriedade estrutural e não uma propriedade material, e as suas repercussões fazem-se sentir essencialmente quando o engrenamento entre os agregados perde preponderância: devido à grande abertura das fissuras;

e/ou devido à degradação das interfaces originada por cargas cíclicas. Os mecanismos resistentes mobilizados estão representados na Figura 2.59 b).

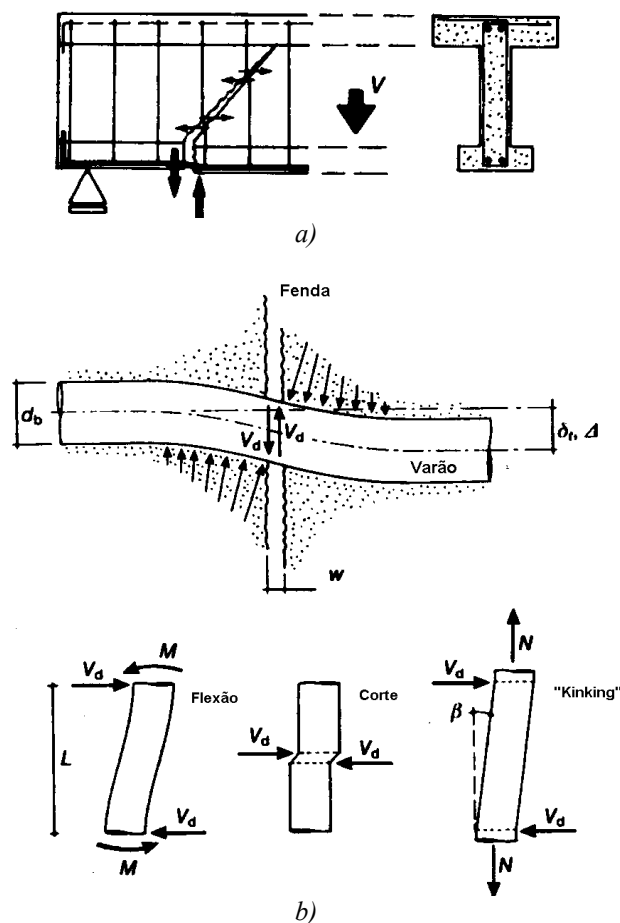


Figura 2.59 – a) Efeito de cavilha. b) Mecanismos resistentes que contribuem para o efeito de cavilha (CEB 1996).

A efectividade do efeito de cavilha depende de múltiplos factores de índole estrutural, como sejam o arranjo e o recobrimento das armaduras, a forma da secção e a existência de confinamento lateral. Dada a multiplicidade e complexidade dos factores intervenientes, e considerando que o seu efeito apenas é sensível para grandes aberturas de fendas, ou seja, perto do estado limite último, muita da pesquisa efectuada sobre este efeito concentrou-se essencialmente no cálculo da capacidade última da interface, essencialmente apoiada em resultados experimentais. A este respeito uma revisão bibliográfica sobre o assunto pode ser encontrada em (CEB 1996; fib 1999a).

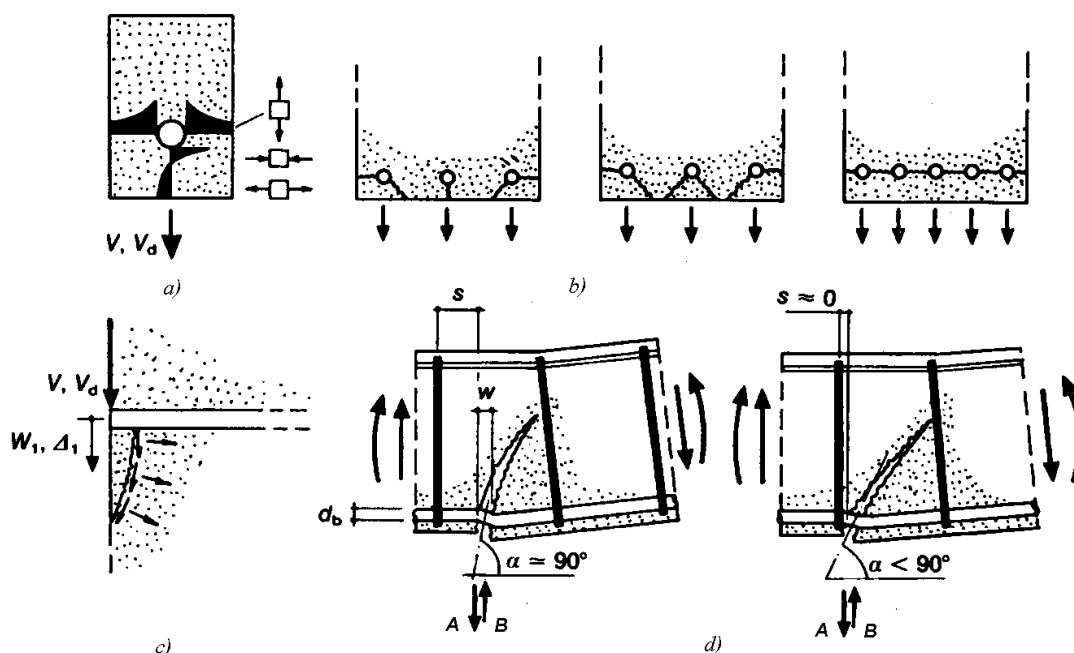


Figura 2.60 – a) Estado de tensão multiaxial nas imediações de uma varão com recobrimento limitado. b) Fendas radiais (“splitting cracks”) c) Rotura por corte/compressão debaixo de uma varão com grande recobrimento. d) Modos A e B do efeito de cavilha (CEB 1996).

Dependendo da massa de betão que interage com a armadura, dois tipos distintos de acção podem ser evidenciados, prevalecendo diferentes mecanismos resistentes em cada um deles. No caso do recobrimento à armadura em apreço ser reduzido, prevalecem as tensões de tracção, podendo o efeito de cavilha ser limitado pela ocorrência de fendas radiais originadas pelo complexo estado de tensão que envolve o varão (Figura 2.60 a) e b)). No caso do recobrimento ser grande, o efeito de cavilha pode ser condicionado pela formação de uma cunha de betão, característica de uma rotura localizada por corte compressão (Figura 2.60 c)). Dependendo do sentido de actuação da carga, ambas as situações podem ocorrer no mesmo elemento estrutural, conforme evidenciado na Figura 2.60 d), ocorrendo a primeira (designada aqui como *modo A*) quando a armadura é empurrada contra a camada de recobrimento e a segunda (*modo B*) quando a armadura é empurrada contra o núcleo no elemento estrutural. Em geral, o modo *B* é mais resistente e a resposta é mais rígida do que a associada ao modo *A*, mas em certas circunstâncias os dois modos tendem a convergir: por exemplo, a mobilização da resistência em modo *B* é dificultada pela existência de uma fissura com uma inclinação reduzida em relação ao varão, e a resistência em modo *A* é aumentada pela proximidade de um estribo (Figura 2.60 d)).

O comportamento deformacional $V_B-\Delta_B$, em modo *B*, é geralmente linear até cerca de 40% da força última V_{Bd} , podendo a resposta ser satisfatoriamente obtida através das equações de uma viga (o varão) em fundação elástica (neste caso o betão). A partir desse valor, a não linearidade é evidente, existindo variadas propostas para a modificação da rigidez da fundação (CEB 1996). Na análise de elementos laminares de betão contendo armadura distribuída, é essencialmente este o modo de actuação do efeito de cavilha que é relevante. Exemplos de leis constitutivas

para o betão armado fendilhado, com vista à aplicação em modelos computacionais em que este efeito é considerado de forma explícita, podem ser encontradas em (Belletti et al. 2001; Soltani et al. 2003).

CAPÍTULO 3

MODELAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL

3 - MODELAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO BETÃO ESTRUTURAL.

3.1 – CLASSIFICAÇÃO DOS MODELOS

No intuito de fornecer uma classificação sistemática e suficientemente geral das abordagens computacionais ao comportamento não linear do betão estrutural, devem ser tidos em atenção três aspectos fundamentais (Jirasek 2002c): (i) a descrição cinemática, (ii) a lei constitutiva e (iii) a técnica de aproximação numérica. Do que a seguir vai ser exposto torna-se claro que estes aspectos estão intimamente relacionados, devendo ser combinados da forma adequada.

Uma perspectiva histórica do desenvolvimento dos conceitos relativos à modelação computacional do comportamento não linear do betão estrutural pode ser encontrada em (ACI 1998; ASCE 1981; CEB 1996).

3.1.1 – Descrição cinemática

O comportamento dos materiais quasi-frágeis, tais como o betão, é caracterizado pela localização das deformações e danificação do material em zonas relativamente estreitas (quer em tracção, quer em compressão quando o grau de confinamento é reduzido) e pelo desenvolvimento gradual de fissuras macroscópicas. Apesar dos enormes desenvolvimentos a que se assistiu nas últimas duas décadas, a modelação deste processo de localização até a rotura do material continua a ser uma matéria em permanente evolução na mecânica dos sólidos contemporânea.

Podem assim ser identificadas três tipos de descrição cinemática do campo de deslocamentos $u(x)$. A primeira incorpora as chamadas *descontinuidades fortes*, ou seja, descontinuidades no campo de deslocamentos. O campo de extensões $\varepsilon(x)$ consiste numa parte regular, obtida por diferenciação do campo de deslocamentos, e numa parte singular sob a forma de um múltiplo da função delta de Dirac. Isto está esquematicamente representado na *Figura 3.1 a)* para o caso unidimensional. Fisicamente, a descontinuidade forte pode ser assimilada a uma fenda macroscópica.

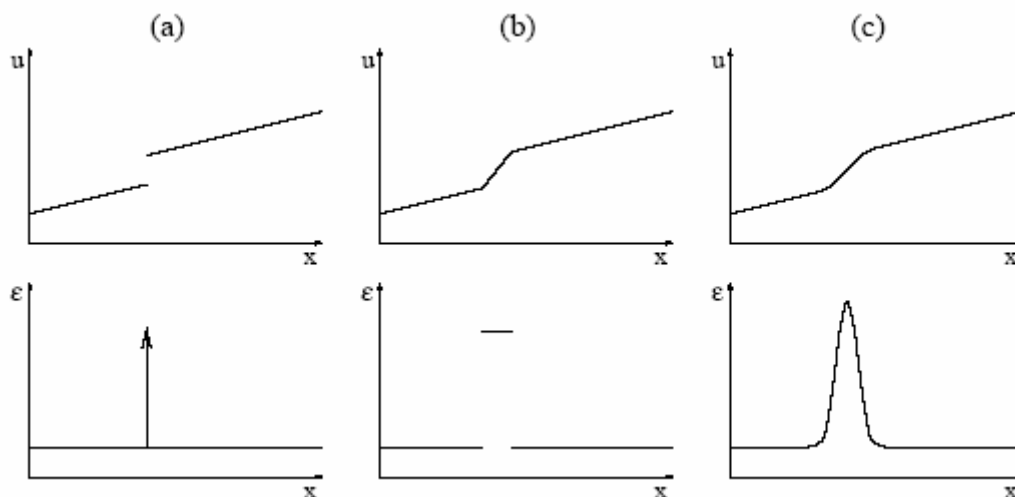


Figura 3.1– Descrição cinemática com (Jirasek 2002b): a) uma descontinuidade forte; b) duas descontinuidades fracas; c) sem descontinuidades.

Outro tipo possível de descrição cinemática representa a região com deformação localizada por uma banda de espessura finita, separada da restante parte do corpo por duas *descontinuidades fracas*, isto é, existe uma descontinuidade no campo de extensões, mas o campo de deslocamentos permanece contínuo. Isto está esquematicamente representado na *Figura 3.1 b)* para o caso unidimensional. Em termos físicos, a banda entre duas descontinuidades fracas corresponde a uma zona de processamento da fractura com uma densidade constante de microdefeitos.

Por último, é possível usar um campo de deslocamentos contínuo e diferenciável em toda a extensão do corpo, permanecendo o campo de extensões contínuo. A localização das deformações manifesta-se pela elevada concentração de extensões numa zona estreita, com uma transição gradual e contínua para os valores correntes nas regiões circundantes. Um perfil típico do campo de deslocamentos e de extensões está representado na *Figura 3.1 c)* para o caso unidimensional. Fisicamente, corresponde a uma zona de processamento da fractura com maior concentração de microdefeitos no centro.

3.1.2 – Lei constitutiva

Cada um dos diferentes tipos de descrição cinemática atrás descritos requer um tipo distinto de lei constitutiva. No entanto, pode-se também afirmar que a lei constitutiva é a componente primária e principal de qualquer modelo, e que a descrição cinemática surge como consequência directa.

No domínio das descontinuidades fortes, e no caso mais simples, estas podem ser consideradas como não transmitindo tensões, o que conduz necessariamente a uma singularidade na frente de descontinuidade (a extremidade da fissura). O critério para a propagação da fractura é então

baseado na LEFM e formulado em termos dos factores intensidade de tensão, ou equivalentemente, à custa de equações de balanço energético. Tal como já referido no Capítulo 2, apenas em estruturas de escala muito grande, nas quais o tamanho da ZPF é desprezável, é possível aplicar as leis da LEFM. Com a excepção de barragens de grandes dimensões é necessário levar em linha de conta o tamanho da ZPF, pelo menos na direcção tangencial à superfície de descontinuidade. Leis constitutivas baseadas no modelo da fenda fictícia são então adoptadas para ter em conta estes factores.

As leis constitutivas associadas à adopção de uma descrição cinemática baseada em descontinuidades fracas são usualmente baseadas no modelo da banda fendilhada. Numa primeira análise, e em casos unidimensionais, estas leis podem ser encaradas como uma simples regularização da singularidade associada ao campo de extensões dos modelos com descontinuidades fortes, disseminando a abertura da fenda por um comprimento finito h .

Para a descrição cinemática do processo de localização sem descontinuidades dos campos de deslocamentos e de extensões, têm de ser utilizadas técnicas de regularização mais sofisticadas. Nestes casos, as leis constitutivas devem ser baseadas em variáveis não locais tais como as referidas em 2.2.3.2 (modelos não locais do tipo integral) ou em teorias gradientes (modelos não locais do tipo diferencial) (Jirasek 2002b).

3.1.3 – Técnicas de aproximação numérica

A abordagem numérica utilizada para obter uma aproximação do campo de deslocamentos associado a cada tipo de lei constitutiva é usualmente baseada na técnica dos elementos finitos.

As descontinuidades fortes podem ser capturadas por elementos de interface (também denominados de elementos de junta), colocados entre elementos finitos bi- ou tridimensionais nos quais a estrutura é discretizada (Schellenkens 1990). Este procedimento é relativamente simples se a forma da descontinuidade for conhecida à priori (Feenstra et al. 1991b; Rots e Blaauwendraad 1989). No caso geral, a fissura propaga-se ao longo da estrutura de acordo com uma trajectória desconhecida. Uma possível solução é a geração, automática ou manual, de novas malhas de elementos finitos na vizinhança da extremidade da fractura (Ingraffea e Saouma 1985) ou permitir que as fendas evoluam apenas segundo as fronteiras de elementos pré-existentes (Alfaiate 1992). Como alternativa elegante para obviar esta dificuldade surgiram os *elementos com descontinuidades embebidas* (Jirasek 2002a; Jirasek 2002c), em que as funções de interpolação são enriquecidas, directa ou indirectamente, com funções de forma descontínuas ou modos de deformação que correspondem a campos de deslocamentos descontínuos, respectivamente. Todavia este tipo de abordagem depara-se também com algumas dificuldades relacionadas com as restrições que têm de ser impostas ao tamanho e à forma dos elementos, e ainda com a falta de robustez no tratamento de situações de ramificação das

fissuras (existência de múltiplas descontinuidades). Por outro lado, e devido à grande sensibilidade demonstrada pela posição da descontinuidade em relação ao elemento finito, é muito difícil estender esta técnica a casos tridimensionais, pelo menos sem o uso de artifícios numéricos que levam à perda da simplicidade conceptual do método (Jirasek 2002c). Ainda dentro desta abordagem, e respondendo a algumas das dificuldades anteriormente referidas, surgiu o chamado “*Extended Finite Element Method*” (X-FEM). Nesta formulação, as descontinuidades são incorporadas, não pela adição de novas funções de forma, mas pela multiplicação das funções de forma existentes por funções criteriosamente seleccionadas (por exemplo funções de Heaviside). As vantagens deste método residem na possibilidade de tornar totalmente independentes os campos de deformação de ambos os lados da descontinuidade, eliminar incompatibilidades entre as interpolações do campo de deslocamentos de elementos adjacentes e lidar de forma robusta com situações tridimensionais e de ramificação da fissuração (Jirasek 2002b; Jirasek 2002c).

O tipo de abordagem numérica atrás descrita é competitiva na modelação de peças estruturais cujo comportamento seja marcado pela propagação de um número reduzido de fissuras. A descrição cinemática baseada em descontinuidades fortes está mais de acordo com a realidade física de uma fissura macroscópica, pelo que a correspondente abordagem numérica tem um desempenho superior às demais na tradução do comportamento de fissuras nestas circunstâncias. Modelos deste tipo são intensivamente utilizados na investigação do processo de fractura de espécimens sujeitos a estados de tensão complexos, permitindo aprofundar e validar conhecimentos na área da mecânica da fractura. Contudo, a sua aplicação extensiva na análise de estruturas de engenharia civil esbarra no facto de, em casos com padrões de fissuração difusa associada à existência de armaduras aderentes, obrigar à utilização de elementos de interface entre os elementos finitos de betão e os varões de forma a modelar o fenómeno de aderência. A geração de malhas torna-se muito laboriosa e, dado que não é a evolução de uma fissura localizada a ditar a rotura da estrutura, o seu uso é pouco corrente.

No caso da descrição cinemática através de descontinuidades fracas, são utilizados elementos finitos correntes na discretização do campo de deslocamentos, residindo neste facto uma das suas principais vantagens e motivo da sua maior utilização na análise de estruturas. O tratamento da localização das deformações é resolvido através da introdução de uma grandeza com a dimensão de um comprimento na lei constitutiva, a largura da banda de fendilhação h (ver 2.2.3.2). Na abordagem numérica, o problema reside na objectividade dos cálculos em relação à malha de elementos finitos utilizada, ou seja, garantir a mesma dissipação de energia no processo de fractura qualquer que seja o tamanho dos elementos finitos. Não sendo de modo algum prático fazer depender o tamanho dos elementos finitos utilizados da largura h , pode-se fazer o inverso, ou seja, adoptar h em função do tamanho do elemento utilizado, conforme

proposto originalmente por (Bazant e Oh 1983). Desta forma ajusta-se a curva de amolecimento em função do elemento e assegura-se que a energia de fractura se dissipa totalmente.

No caso bidimensional, a propagação de uma banda fendilhada diagonal leva à necessidade de ajustar o valor de h a adoptar de acordo com procedimentos mais ou menos empíricos. Na *Figura 3.2* está representado o procedimento proposto por (Cervenka et al. 2002) para elementos lineares, generalizado por (Dahlblom e Ottosen 1990) para os elementos quadráticos. Nestes últimos, dada a possibilidade de o campo de extensões ser variável, as deformações podem localizar-se em apenas um ponto de Gauss. Simplificadamente, (Rots et al. 1985) indicam o método proposto na *Figura 3.3*.

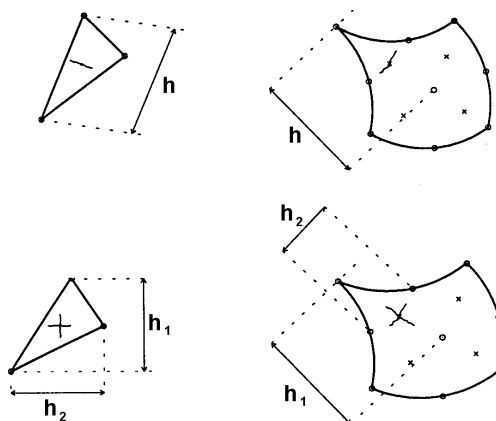
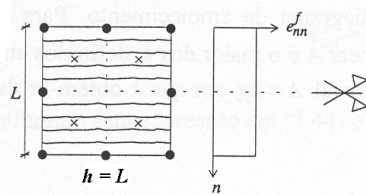
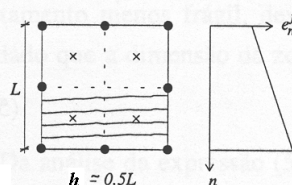


Figura 3.2—Largura efectiva da banda fendilhada no caso de a propagação da fractura não ser paralela aos lados dos elementos finitos. Adaptado de (Barros 1995).

1º caso: fendas distribuídas em todo o elemento. Estado de deformação uniforme no elemento



2º caso: As fendas são aproximadamente paralelas a um dos lados do elemento e distribuem-se parcialmente no elemento. No elemento desenvolve-se uma distribuição linear de deformação



3º caso: A banda de fendilhação não segue as linhas da malha (desenvolvimento em zig-zag).

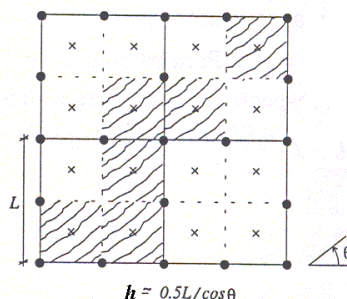


Figura 3.3—Formulação simplificada da largura efectiva da banda fendilhada no caso de a propagação da fractura não ser paralela aos lados dos elementos finitos quadráticos. Adaptado de (Barros 1995).

Muitas vezes é adoptada simplesmente a raiz quadrada da área do elemento finito, ou o diâmetro de um círculo com a mesma área, como largura efectiva da banda fendilhada (raiz cúbica do volume ou esfera com o mesmo volume do elemento, respectivamente, em casos tridimensionais). Note-se que os elementos lineares fornecem uma aproximação do campo de deformações constante, consistente com a prevista pela lei constitutiva do modelo da banda fendilhada, o que não é rigorosamente verdade nos elementos quadráticos.

Dado que as deformações se tendem a localizar num elemento, com o refinamento da malha, a localização das deformações tende, no limite, para uma solução de descontinuidade forte, não permitindo a resolução do campo de deformações na ZPF, nem permitindo averiguar o seu desenvolvimento com o progresso da fractura. Desta forma, deixa de ser conceptualmente vantajoso refinar a malha até obter elementos finitos que conduzam a uma largura efectiva da banda fendilhada inferior ao tamanho da ZPF, na medida em que a homogeneização efectuada do campo de deformações já não é consistente com a realidade, muito embora a objectividade dos resultados esteja garantida. Nestes casos, a adopção de leis constitutivas não locais, baseadas em descrições contínuas do campo de deslocamentos e de extensões, permite obter a resolução do campo de extensões na ZPF (*Figura 3.4*). A grande desvantagem reside no facto de obrigarem à utilização de malhas muito apertadas (para aplicar formulações não locais os elementos devem ser mais pequenos do que a largura da ZPF), pelo que a sua utilização em estruturas de dimensões correntes é ainda proibitiva.

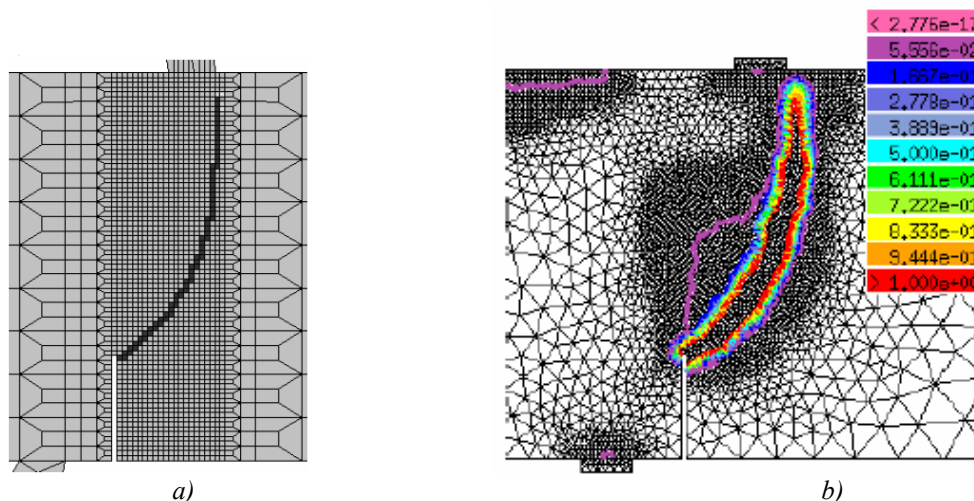


Figura 3.4 – Em ambas as modelações foi usado o mesmo modelo numérico. Em a) foi utilizada uma formulação local. As deformações localizam-se numa faixa com a largura de um elemento. Em b) foi usada uma formulação não local. As deformações localizam-se numa banda de largura superior ao tamanho dos elementos (Jirasek 2002c).

Na presença de armadura aderente em quantidade superior à mínima, deixa de existir localização das deformações a um nível macroscópico, tal como exposto em 2.6.1. A modelação da fendilhação nestas circunstâncias é eficazmente efectuada através da utilização de leis constitutivas estabelecidas em termos dos valores médios das tensões e das extensões sobre

painéis ou tirantes de betão armado, facilmente adaptáveis aos modelos baseados em descontinuidades fracas. A não existência de localização das deformações elimina a dependência da malha de elementos finitos utilizada, não havendo, no entanto, vantagens no refinamento das malhas de elementos finitos até tamanhos inferiores ao espaçamento médio entre fendas. Isto deve-se ao facto do volume de controlo sobre o qual são estabelecidas as leis constitutivas, conter, no mínimo, duas ou mais fissuras.

Se na fase de processamento da fractura os modelos não locais são os que têm melhor desempenho, os modelos discretos (baseados em descontinuidades fortes) são os que melhor reflectem o comportamento das fendas macroscópicas. Porém, a abordagem numérica correspondente à descrição cinemática baseada em descontinuidades fracas é a que, ainda hoje, se apresenta como mais competitiva na modelação de estruturas reais de engenharia civil. A facilidade com que permite o tratamento da fissuração localizada na ausência de armadura aderente, ou da fissuração distribuída através do conceito de diagrama de retenção de tensões no betão exposto em 2.6.1, usando de malhas de elementos finitos correntes, assegura com que seja o método mais difundido para a análise não linear de estruturas de betão. De uma forma geral, pode dizer-se que apresenta o melhor compromisso entre a facilidade de utilização e o rigor necessário na maior parte das análises de índole estrutural.

Nas secções seguintes vão ser descritos as diferentes formulações existentes para as leis constitutivas (modelos elásticos, modelos elasto-plásticos, modelos de dano, etc) associadas à descrição cinemática baseada em descontinuidades fracas.

3.2 – MODELOS BASEADOS NO CONCEITO DE EXTENSÃO TOTAL

A formulação deste tipo de modelos pode ser encarada como uma extensão dos modelos baseados na teoria da elasticidade ao tratamento da fractura do betão, estando usualmente acoplados a um modelo elástico não linear em compressão, dado que também nestes não é efectuada qualquer decomposição das extensões.

Classicamente, os modelos elásticos não lineares podem ser classificados segundo um de três tipos (Chen 1982; Willam 2002):

- i. **Modelos elásticos de Cauchy** – Neste tipo de modelos, o estado de tensão depende apenas do estado corrente de extensão. Na forma tensorial, a equação constitutiva pode ser posta da forma,

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (3.1)$$

onde σ_{ij} é o tensor das tensões totais, ε_{kl} o tensor das deformações totais e f_{ij} um função tensorial de segunda ordem. O comportamento do material descrito por esta equação é reversível e independente da história do carregamento, o que vai contra o comportamento observado para o betão. Desta forma, esta formulação está longe de fornecer uma lei constitutiva geral, sendo a sua utilização restringida a casos de carregamentos monotónicos e proporcionais. Computacionalmente, este tipo de leis pode facilmente ser implementada utilizando formulações secantes. Pode ser demonstrado que, sob certos ciclos de carga, um material elástico de Cauchy pode gerar energia, o que entra em conflito com as leis da termodinâmica (Chen 1982). Este facto conduz à consideração de um outro tipo de lei constitutiva mais geral.

- ii. **Modelos Hiperelásticos (ou modelos elásticos de Green)** – Este tipo de modelos relaciona ainda as tensões totais com as extensões totais, impondo reversibilidade e independência da história do carregamento. Baseiam-se na existência da função densidade de energia de deformação W (ou a função densidade de energia complementar Ω), tais que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.3)$$

Estas funções W e Ω dependem do estado corrente de extensão ou de tensão, respectivamente, e asseguram que não há geração de energia através dos ciclos de carga. Para um material inicialmente isotrópico, estas funções podem ser expressas à custa de qualquer conjunto de três invariantes dos tensores das extensões ou das tensões, respectivamente (Chen 1982; Willam 2002).

- iii. **Modelos incrementais (modelos hipoeelásticos de Truesdell)** – Este tipo de formulação descreve um comportamento de um material, cujo estado de tensão corrente depende não só do estado de extensão corrente, mas também da história do carregamento. De uma forma geral,

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (3.4)$$

O ponto significa diferenciação em ordem ao tempo. No entanto, assume-se que esta relação é homogénea em ordem ao tempo, ou seja, admite-se independência da velocidade do carregamento, pelo que a variável tempo não aparece explicitamente nas equações. A expressão (3.4) traduz uma relação muito geral. Por simplicidade, um caso particular da equação geral pode ser obtido considerando reversibilidade ao nível das

deformações infinitesimais (hipoelasticidade segundo Truesdell), relacionando a taxa de variação das tensões com a taxa de variação das extensões,

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.5)$$

em que D_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, função das componentes dos tensores das tensões ou das extensões.

Muitos dos modelos desenvolvidos nas últimas três décadas com vista a reproduzir o comportamento do betão, essencialmente o betão armado, baseiam-se nos conceitos que resumidamente, e em traços gerais, foram acima indicados. Porém, a introdução da fractura leva a que alguns pressupostos das classificações referidas tenham de ser relaxados. Apesar da natureza do comportamento do betão, principalmente quando sujeito a cargas não proporcionais, se afastar muito do de um material elástico, o extenso trabalho desenvolvido no âmbito deste tipo de modelos, baseado na reprodução de resultados experimentais, granjeou-lhes muita popularidade, podendo ser enquadrados naquilo a que se podem chamar de modelos empíricos. Este facto contribuiu para que, durante o seu desenvolvimento, o rígido quadro teórico da teoria da elasticidade não linear nem sempre tivesse sido escrupulosamente seguido.

É, no entanto, possível encontrar um denominador comum às várias formulações propostas, permitindo o seu enquadramento dentro dum contexto passível de uma descrição unificada: o facto de se basearem no conceito de extensão total. Dada a importância da fissuração para o computo da não linearidade da resposta estrutural, optou-se ainda por distinguir os modelos de acordo com o tipo de modelo de fissuração utilizado.

Dado o seu carácter empírico, muitas das formulações desenvolvidas são apenas aplicáveis a casos bidimensionais de estado plano de tensão (Ahmad e Chung 1995; Ayoub e Filippou 1998; Belletti et al. 2001; CEB 1993; Cervenka et al. 2002; Chen 1982; Darwin e Pecknold 1977; Foster e Marti 2003; Hsu e Zhu 2002; Hu e Schnonobrich 1990; Stevens et al. 1987; Vecchio 1989; Vecchio 1990; Vecchio 1992), sendo muito menos numerosas as referências relativas a implementações tridimensionais (Elwi e Murray 1979; Kotsovos e Pavlovic 1995; Vecchio e Selby 1991; Witte e Kikstra 2002b).

3.2.1– Formulação geral

Este tipo de modelos é, em geral, formulado de acordo com uma relação tangencial estabelecida num dado referencial local n, s, t :

$$\underline{\dot{\sigma}}_{nst} = \underline{D}_{nst} \underline{\dot{\epsilon}}_{nst} \quad (3.6)$$

Formulações secantes são também correntes e de implementação simples e robusta, sendo no entanto apenas aplicáveis ao cálculo da resposta estrutural originada por carregamentos monotónicos e proporcionais. A relação (3.6), expressa no referencial geral x, y, z toma a forma:

$$\underline{\dot{\sigma}}_{xyz} = \underline{T}^T \underline{D}_{nst} \underline{T} \underline{\dot{\epsilon}}_{xyz} \quad (3.7)$$

A matriz de transformação \underline{T} , entre o referencial geral e local, vem dada por,

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} l_n^2 & l_n l_s & l_t l_n \\ m_n^2 & m_n m_s & m_t m_n \\ n_n^2 & n_n n_s & n_t n_n \\ 2l_n m_n & l_n m_s + l_s m_n & l_t m_n + l_n m_t \\ 2m_n n_n & m_n n_s + m_s n_n & m_t n_n + m_n n_t \\ 2n_n l_n & n_n l_s + n_s l_n & n_t l_n + n_n l_t \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde (l_n, m_n, n_n) , (l_s, m_s, n_s) , (l_t, m_t, n_t) , são as coordenadas dos versor dos eixos n, s, t , respectivamente, expressas no referencial geral x, y, z .

No caso mais geral a matriz de rigidez tangente pode ser decomposta em quatro sub-matrizes,

$$\underline{D}_{nst} = \begin{bmatrix} \underline{D}_{aa} & \underline{D}_{ab} \\ \underline{D}_{ba} & \underline{D}_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde \underline{D}_{aa} é a matriz de rigidez tangencial das componentes normais das extensões locais, \underline{D}_{bb} é a matriz de rigidez tangencial das componentes distorcionais das extensões locais, e \underline{D}_{ab} e \underline{D}_{ba} são as matrizes de rigidez tangente que representam o acoplamento entre os termos normais e distorcionais. A sub-matriz \underline{D}_{bb} é, em geral, diagonal:

$$\underline{D}_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial \gamma_{ns}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \gamma_{st}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \sigma_{tn}}{\partial \gamma_{tn}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

As sub-matrizes \underline{D}_{ab} e \underline{D}_{ba} podem, no caso mais geral, ser matrizes cheias do tipo,

$$\underline{D}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \gamma_{ns}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \gamma_{st}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \gamma_{tn}} \\ \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \gamma_{ns}} & \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \gamma_{st}} & \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \gamma_{tn}} \\ \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \gamma_{ns}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \gamma_{st}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \gamma_{tn}} \end{bmatrix}, \quad \underline{D}_{ba} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial \varepsilon_{tt}} \\ \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \varepsilon_{tt}} \\ \frac{\partial \sigma_{tn}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{tn}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{tn}}{\partial \varepsilon_{tt}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

e \underline{D}_{aa} uma matriz cheia com as respectivas derivadas parciais:

$$\underline{D}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varepsilon_{tt}} \\ \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{tt}} \\ \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varepsilon_{nn}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varepsilon_{ss}} & \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \varepsilon_{tt}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

As relações assim determinadas são extremamente gerais, sendo correntemente efectuadas algumas simplificações.

3.2.2 – Modelos para o betão não fendilhado

Uma formulação possível deste tipo de modelos baseia-se na lei constitutiva de um material ortotrópico, relação essa que se expressa nos eixos de ortotropia do material, n, s, t . Antes de fissurar admite-se que os eixos de ortotropia do betão coincidem com a direcção das tensões principais totais, fazendo com que a matriz de transformação \underline{T} varie com o carregamento. A matriz de rigidez da expressão é obtida por inversão da matriz de flexibilidade \underline{C}_{nst} :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{nst} = \underline{C}_{nst} \dot{\underline{\sigma}}_{nst} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{nn} \\ \dot{\varepsilon}_{ss} \\ \dot{\varepsilon}_{tt} \\ \dot{\varepsilon}_{ns} \\ \dot{\varepsilon}_{st} \\ \dot{\varepsilon}_{tn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_n} & -\frac{\nu_{sn}}{E_s} & -\frac{\nu_{tn}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ns}}{E_n} & \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_{ts}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{nt}}{E_n} & -\frac{\nu_{st}}{E_s} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ns}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{st}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{tn}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{nn} \\ \dot{\sigma}_{ss} \\ \dot{\sigma}_{tt} \\ \dot{\sigma}_{ns} \\ \dot{\sigma}_{st} \\ \dot{\sigma}_{tn} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Usualmente considera-se que a relação (3.13) é simétrica, obrigando a que,

$$E_n \nu_{sn} = E_s \nu_{ns} \quad E_s \nu_{ts} = E_t \nu_{st} \quad E_t \nu_{nt} = E_n \nu_{tn} \quad (3.14)$$

pelo que apenas é necessário definir nove quantidades independentes no caso tridimensional, ou apenas quatro em estado plano de tensão. A simetria da relação (3.14) é, em rigor, apenas uma imposição vantajosa do ponto de vista computacional, na medida em que o betão não é um material elástico (Foster e Marti 2003; Maekawa e Okamura 1983; Vecchio 1992). Desta forma obtém-se (CEB 1996; Chen 1982; Elwi e Murray 1979),

$$\underline{D}_{aa} = \frac{1}{\Phi} \begin{bmatrix} (1-\mu_{ts}^2)E_n & (\mu_{nt}\mu_{ts} + \mu_{ns})\sqrt{E_n E_s} & (\mu_{ns}\mu_{ts} + \mu_{tn})\sqrt{E_n E_t} \\ & (1-\mu_{tn}^2)E_s & (\mu_{ns}\mu_{tn} + \mu_{ts})\sqrt{E_s E_t} \\ sim. & & (1-\mu_{ns}^2)E_t \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\underline{D}_{bb} = \begin{bmatrix} G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & G_{ns} & 0 \\ 0 & 0 & G_{tn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_{ab} = \underline{D}_{ba} = \underline{0}$$

$$\text{onde, } \Phi = \frac{1}{1 - \mu_{ns}^2 - \mu_{st}^2 - \mu_{tn}^2 - 2\mu_{ns}\mu_{st}\mu_{tn}} \text{ e } \mu_{ns}^2 = \nu_{ns}\nu_{sn}, \text{ etc.}$$

Para obter os módulos E_i , recorre-se ao conceito de extensão equivalente introduzido por (Darwin e Pecknold 1977). Este conceito baseia-se na evidência experimental que mostra que num provete de betão sujeito a um estado de tensão tridimensional, a curva $\sigma_i - \varepsilon_i$ em cada direcção mantém aproximadamente a mesma forma, independentemente do estado de tensão nas restantes direcções. Este facto permite que a mesma curva normalizada possa ser utilizada, garantindo apenas que os seus parâmetros definidores (tensão e extensão de pico, por exemplo) sejam ajustados para um determinado estado de tensão.

A extensão incremental equivalente é definida segundo cada um dos eixos locais como (note-se que, no que se segue, não está a ser usada a notação indicial, pelo que a repetição dos índices não implica qualquer somatório):

$$d\varepsilon_i^{eq} = \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (3.16)$$

A acumulação destas variáveis durante a história do carregamento dá origem às denominadas extensões uniaxiais equivalentes de Darwin e Pecknold:

$$\varepsilon_i^{eq} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (3.17)$$

Existem na literatura muitas propostas diferentes para a curva normalizada que permite relacionar a tensão na direcção i com a extensão uniaxial equivalente correspondente. Como exemplos temos a curva de Saenz, utilizada por (Darwin e Pecknold 1977) e generalizada por (Elwi e Murray 1979), a parábola de Hognestad (Vecchio 1990), a curva de Thorenfeldt (Vecchio e Collins 1993; Witte e Kikstra 2002b) ou a curva proposta pelo CEB (CEB 1993; Cervenka et al. 2002). Em regra, essa curva é uma função da extensão uniaxial equivalente ε_i^{eq} , da tensão de pico $\sigma_{cp,i}$ e da extensão de pico $\varepsilon_{cp,i}$. O módulo tangente E_i , é determinado por,

$$E_i(\varepsilon_i^{eq}, \varepsilon_{cp,i}, \sigma_{cp,i}) = \frac{d\sigma_c(\varepsilon_i^{eq}, \varepsilon_{cp,i}, \sigma_{cp,i})}{d\varepsilon_i^{eq}} \quad (3.18)$$

em que $\sigma_c(\varepsilon_i^{eq}, \varepsilon_{cp,i}, \sigma_{cp,i})$ é a curva uniaxial equivalente, esquematicamente representada na *Figura 3.5*.

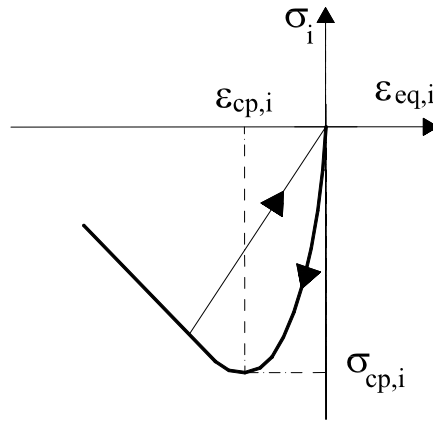


Figura 3.5 – Representação esquemática de uma curva uniaxial equivalente.

A tensão e a extensão de pico são obtidas a partir dos valores mínimos já atingidos através de um factor de escala:

$$\begin{aligned} \sigma_{cp,i} &= K_\sigma \sigma_{MIN,i} \\ \varepsilon_{cp,i} &= K_\varepsilon \varepsilon_{MIN,i} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usualmente considera-se $K_\sigma = K_\varepsilon$, determinado de forma a que a combinação de tensões $\sigma_{cp,s}$ e $\sigma_{cp,t}$ satisfaça a equação da superfície de rotura.

O comportamento em ciclos de descarga e recarga é, nos modelos mais simples, aproximado por uma recta secante para a origem, tal como representado na *Figura 3.5*. No entanto, é possível o uso de expressões mais elaboradas que permitem aproximar o comportamento histerético observado experimentalmente (Alfaiate 1992). A descarga e recarga ocorrem de forma independente segundo cada um dos eixos de ortotropia.

O módulo de distorção G_{ns} é dado pela expressão,

$$G_{ns} = \frac{1}{4\Phi} \left[E_n + E_s - 2\mu_{ns}\sqrt{E_n E_s} - (\mu_{st}\sqrt{E_n} + \mu_{tn}\sqrt{E_s})^2 \right] \quad (3.20)$$

obtendo-se os restantes por permutação dos índices. A expressão (3.20) foi obtida da condição de invariância do módulo de distorção em relação ao sistema de eixos (Alfaiate 1992; Chen 1982), carecendo de comprovação experimental.

Os coeficientes de Poisson, são nos casos mais simples, considerados constantes. No modelo de (Elwi e Murray 1979) são considerados uma função do terceiro grau em ε_i^{eq} ajustada aos resultados experimentais, sempre inferior a 0.5, de forma que o parâmetro Φ da expressão (3.15) seja sempre superior a zero (Chen 1982).

Existe ainda uma outra família de modelos baseada na relação entre as tensões e as extensões octaédricas, e que, de uma forma geral, aproxima melhor o comportamento do betão comprimido, especialmente quando o confinamento é importante. Ao separar a componente hidrostática da componente de desvio do estado de tensão e de deformação, este tipo de modelos permite um ajuste superior aos resultados experimentais, podendo inclusivamente incluir, de forma racional, o efeito de acoplamento entre a tensão de corte octaédrica e a extensão volumétrica através de um módulo de acoplamento H (ver secção 2.4.3). Exemplos de formulações deste tipo podem ser encontradas em (CEB 1996; Kotsovos e Pavlovic 1995).

3.2.3 – Modelos para o betão fendilhado

Em geral considera-se que a fractura tem início em modo I , assim que se viola o critério da tensão máxima (“*tension cut off*”). Este critério é estabelecido no espaço das tensões principais, e pretende aproximar a envolvente experimental. Na *Figura 3.6* estão representados algumas das formulações bidimensionais correntemente utilizadas. De acordo com os resultados experimentais de (Maekawa e Okamura 1983), é ainda formalmente possível fazer depender a tensão máxima de tracção da extensão máxima de compressão já experimentada, traduzindo de alguma forma o efeito do dano produzido por anteriores carregamentos (Maekawa et al. 2003).

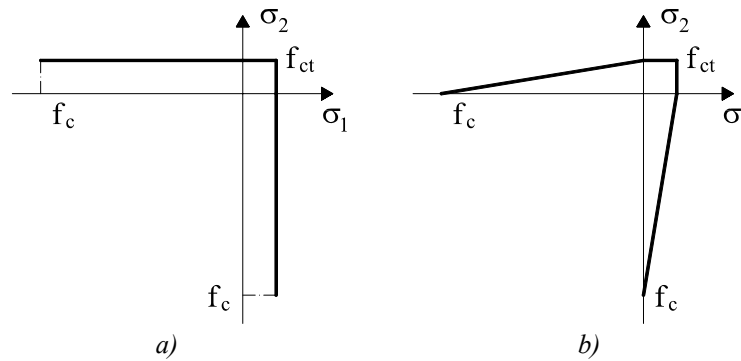


Figura 3.6– Critério da tensão máxima para início da fractura: a) tensão constante (“*constant tension cut off*”); b) tensão linearmente decrescente (“*linear tension cut off*”).

3.2.3.1 – Modelos de fendas fixas

Nos modelos de fendas fixas admite-se que, uma vez violado o critério da tensão máxima, se forma uma fenda (ou mais correctamente uma banda fendilhada) com a direcção do plano perpendicular à tensão principal máxima de tracção. Durante o restante carregamento esta direcção é fixa e representa os eixos de ortotropia do material, nos quais passam a ser estabelecidas as leis constitutivas. Na *Figura 3.7*, o eixo n refere-se à direcção normal à fenda (associado ao modo I de fractura) e os eixos s , t às direcções tangenciais à fenda (associadas aos modos II e III, respectivamente). A memória da orientação permanente do dano no material é uma característica fulcral dos modelos de fendas fixas.

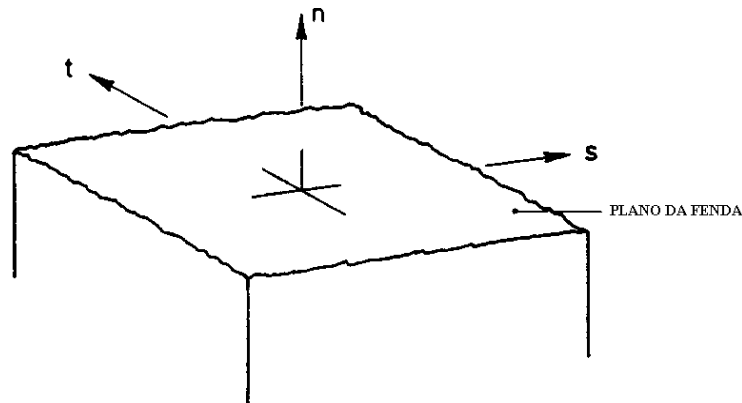


Figura 3.7– Eixos de ortotropia.

Assim que é violado o critério da tensão máxima, o termo $\partial\sigma_{nn}/\partial\varepsilon_{nn}$ é determinado de acordo com a lei de amolecimento adoptada (“*tension softening*”), no caso de se tratar da propagação de uma banda fendilhada localizada, ou de acordo com o diagrama de retenção de tensões no betão adoptado (“*tension stiffening*”), caso se esteja perante fissuração controlada pela armadura aderente (*Figura 3.8*). No caso de se tomar em consideração o efeito da fissuração na redução da resistência à compressão paralela às fissuras (secção 2.6.2), na formulação tangencial, a matriz \underline{D}_{aa} resulta não simétrica,

$$\underline{D}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_{nn}}{\partial\varepsilon_{nn}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{nn}} & \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{ss}} & \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{tt}} \\ \frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial\varepsilon_{nn}} & \frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial\varepsilon_{ss}} & \frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial\varepsilon_{tt}} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

em que os termos nulos resultam de desprezar o efeito de Poisson no betão fendilhado (Figueiras 1983; Póvoas 1991; Stevens et al. 1987; Vecchio 1989; Vecchio 1990; Vecchio 2001a; Vecchio e Selby 1991).

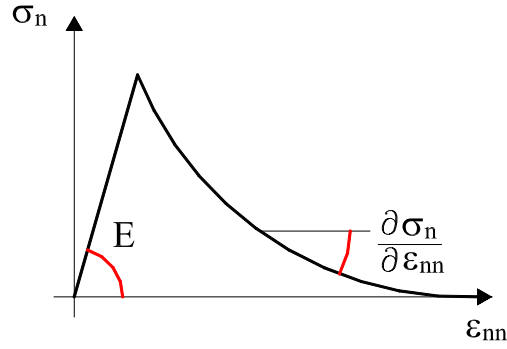


Figura 3.8– Definição do módulo E_n para uma formulação secante ou tangencial, após violação do critério da tensão máxima.

Após início do processo de fissuração na direcção n , admite-se que a rigidez de corte G_{ns} e G_{nt} , se reduzem para uma fracção do seu valor inicial. Usualmente considera-se um factor de redução da rigidez de corte (“*shear retention factor*”), $0 \leq \beta \leq 1$,

$$G_{ns} = G_{nt} = \beta G \quad (3.22)$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal elástico. Nos casos mais simples, β é considerado constante, usualmente igual a 0.1 ou 0.2. Uma análise qualitativa do comportamento das fendas macroscópicas revela intuitivamente que a rigidez de corte no plano da fenda deve diminuir com a sua abertura, pelo que muitos autores (Cervenka et al. 2002; Figueiras 1983; Póvoas 1991; Rots e Blaauwendraad 1989) adoptam um factor de redução da rigidez de corte variável, decrescente com a extensão normal à fissura, ϵ_{nn} . Importa no entanto frisar que, no caso de fendilhação localizada, não controlada pela armadura, o coeficiente β deve ser de alguma forma função da largura da banda fendilhada h , ou equivalentemente, da extensão última do diagrama de amolecimento $\epsilon_{nn,u}$, de modo a garantir a objectividade do resultados. No caso de fendilhação localizada, (Rots e Blaauwendraad 1989) propuseram a expressão (3.23), em que p é um escalar positivo, muitas vezes considerado igual a 1. A expressão tem o inconveniente de considerar nula a rigidez de corte das fendas macroscópicas, o que vai contra os resultados experimentais e teorias estabelecidas sobre o fenómeno do “*aggregate interlock*”.

$$\beta = \left(1 - \frac{\epsilon_{nn}}{\epsilon_{nn,u}} \right)^p \quad (3.23)$$

Em casos de fendilhação estabilizada por armadura aderente, a expressão (3.23) pode ser naturalmente adaptada, sendo também de referir a proposta de (Figueiras 1983), dada pela expressão (3.24), onde ξ vale 0.25 para o caso de fendilhação simples e 0.125 no caso de fendilhação dupla, e a função adoptada por (Cervenka et al. 2002), expressa por (3.25), onde p é a taxa de armadura. As correspondentes representações gráficas estão ilustradas na Figura 3.9.

$$\beta = \begin{cases} \xi \left(1 - \frac{\varepsilon_{nn}}{0.0045} \right), & \varepsilon_{nn} \leq 0.45 \\ 0, & \varepsilon_{nn} > 0.45 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\beta = -c_3 \frac{\ln \left(\frac{1000 \varepsilon_{nn}}{c_1} \right)}{c_2}, \quad \text{onde} \quad (3.25)$$

$$c_1 = 7 + 333(p - 0.005) ; c_2 = 10 - 167(p - 0.005) ; c_3 = 1 ; 0 \leq p \leq 0.002$$

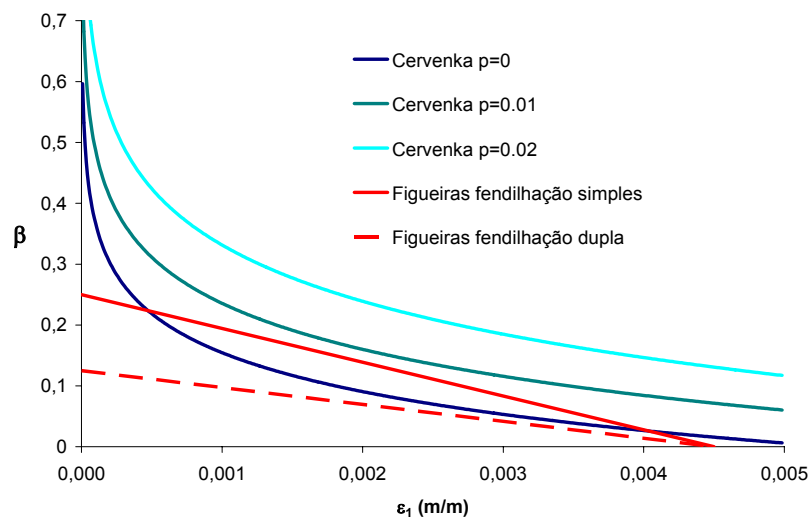


Figura 3.9– Factores de retenção de tensões de corte para betão armado.

Modelos mais sofisticados, baseados em estudos sobre a transferência de tensões entre faces de fissuras macroscópicas, tais como os referidos em 2.3, são passíveis de ser implementados. Como exemplo, tem-se o modelo de (Maekawa et al. 2003; Okamura e Maekawa 1991), originalmente proposto por (Li et al. 1989), derivado a partir da solução analítica do *modelo da densidade de contacto*, que pode ser explicitada no caso de carregamentos monotónicos por,

$$\sigma_{ns} = 3.83 f_c^{1/3} \frac{\psi^2}{1 + \psi^2} \quad ; \quad \psi = \frac{\gamma_{ns}}{\varepsilon_{nn}} \quad (3.26)$$

em que f_c é a resistência à compressão uniaxial (em cilindros) expressa em MPa. Este modelo contempla ainda expressões empíricas simplificadas para os tramos de descarga, conforme ilustradas na Figura 3.10, e expressões para o amolecimento da resposta. Uma revisão das várias propostas para o módulo de rigidez transversal do betão fendilhado pode ser encontrada em (CEB 1996; Zhu et al. 2001). Registe-se o facto de que na formulação tangente da matriz de

rigidez da expressão (3.9), quando se introduz uma dependência das tensões de corte com a extensão normal à fenda, a matriz de acoplamento \underline{D}_{ba} resulta não nula:

$$\underline{D}_{ba} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial \varepsilon_{nn}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \varepsilon_{nn}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

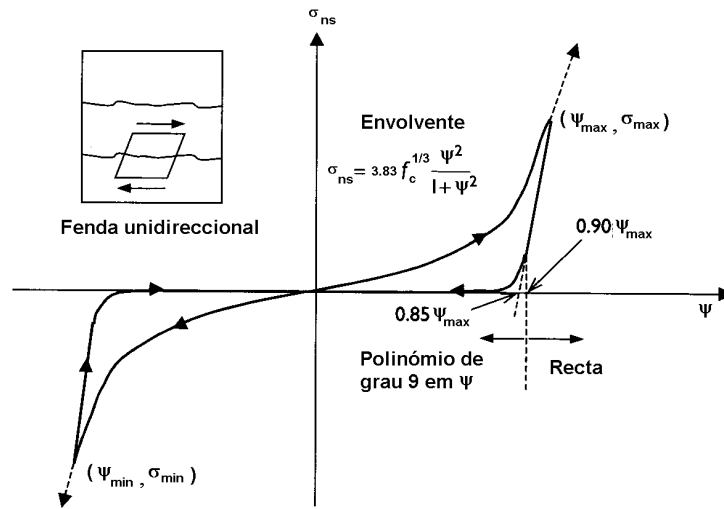


Figura 3.10– Modelo de transferência de tensões de corte através das fissuras. Adaptado de (Maekawa et al. 2003).

Em muitas das formulações referidas na literatura adoptam-se matrizes de rigidez simétricas, adaptando o conceito de extensão uniaxial equivalente também às relações constitutivas do betão armado fendilhado. Este facto tem vantagens do ponto de vista computacional relacionadas com a resolução do sistema de equações de equilíbrio. No entanto, a convergência do processo iterativo com vista à obtenção do correcto estado de equilíbrio requer necessariamente mais iterações caso seja usado um método do tipo Newton-Raphson tradicional.

Até aqui considerou-se apenas a abertura de uma fenda, perpendicular a n . Nos modelos de fendas fixas permite-se a formação de fendas ortogonais entre si (3 no caso tridimensional). No caso da formação de uma segunda fenda perpendicular a s , ou t , o procedimento a seguir seria semelhante. A rigidez de corte G_{st} , neste caso, vem também reduzida. Porém, no caso de abertura de uma fenda perpendicular a s , por exemplo, a redução da rigidez de corte G_{ns} terá de ter em conta o efeito das duas fissuras perpendiculares (Figura 3.11). No caso do modelo proposto por (Figueiras 1983) esse efeito é tido em linha de conta, de acordo com a Figura 3.9. Em (Maekawa et al. 2003) é descrito um método consistente com o modelo da expressão (3.26).

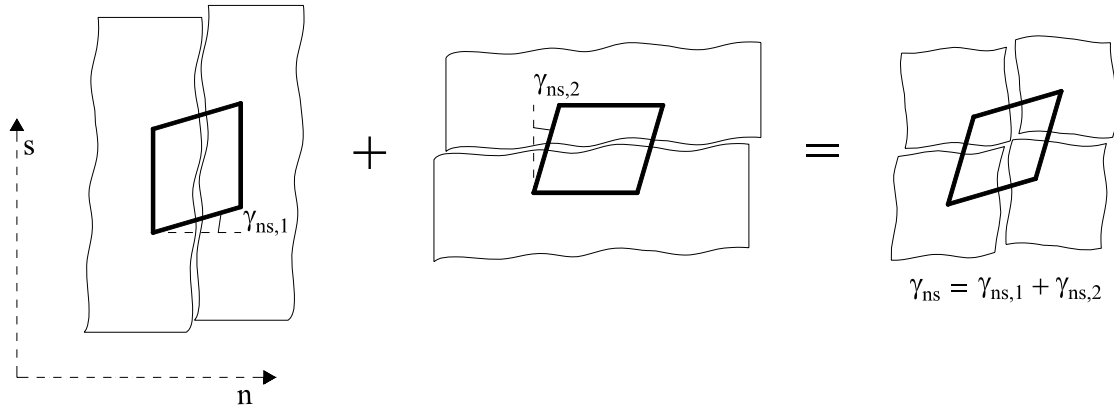


Figura 3.11– Efeito da abertura de duas fendas perpendiculares no factor de redução da rigidez de corte.

Este tipo de modelos permite ainda formular de forma independente os módulos de rigidez na direcção normal às fissuras, pelo que permitem a consideração na anisotropia da armadura, conforme expresso na Figura 3.12.

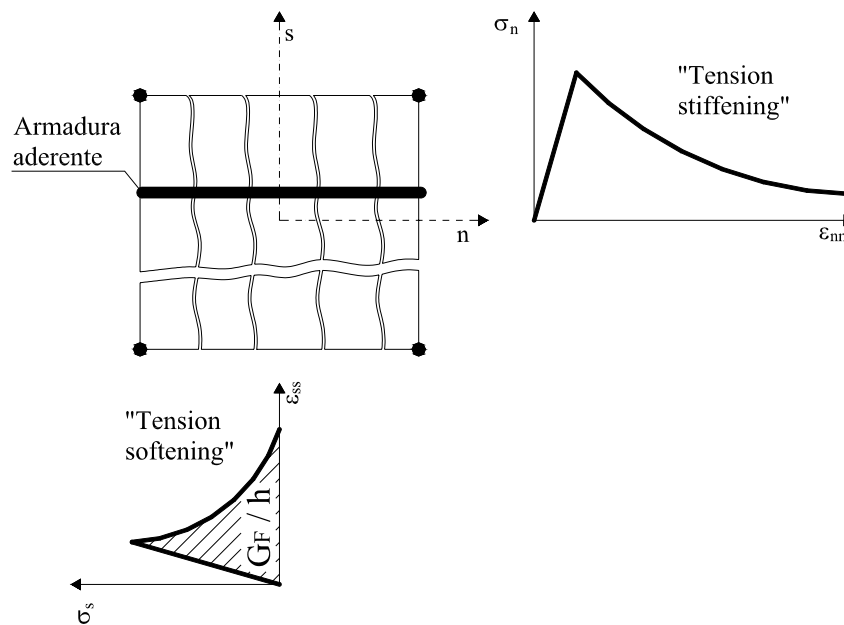


Figura 3.12– Diagramas de "tension stiffening/softening" anisotrópicos.

Dada a existência de tensões de corte no plano da fenda, as tensões principais podem rodar e voltar a violar o critério da tensão máxima. Isto ocorre de forma marcada no caso de carregamentos não proporcionais. Por outro lado, mesmo em estruturas sujeitas a carregamentos proporcionais, as redistribuições de esforços podem levar à formação de novas fendas cuja trajectória intersecte fendas previamente formadas segundo ângulos inferiores a 90 graus. Por fim, sabe-se que as condições de cura de uma peça de betão, assim como as acções ambientais a que os elementos estruturais estão sujeitos levam invariavelmente à formação de fendas, cujo desenvolvimento pode ser mais ou menos importante, e cuja orientação em relação à fissuração provocada pelas acções mecânicas pode ser variável. Conclui-se assim que um modelo de

fendas suficientemente geral deve prever a possibilidade de fissuração não ortogonal (Maekawa et al. 2003). Este facto pode rigorosamente ser tido em consideração nos modelos de fendilhação distribuída com decomposição das extensões, dando origem, no entanto, a uma formulação implícita que obriga a ciclos iterativos internos na lei constitutiva (ver secção **3.3.1**), o que eleva o custo computacional associado, particularmente no caso de análises dinâmicas, ou em modelos de grande dimensão.

Um método simplificado para o tratamento da fissuração não ortogonal através de métodos explícitos, usando ainda extensões totais, foi proposto por (Maekawa et al. 2003) baseando-se do conceito de fenda activa (*“active crack approach”*). O método baseia-se no facto de que nem todas as fendas (não ortogonais) desempenham simultaneamente um papel determinante para a não linearidade do elemento. As fendas activas serão então aquelas que exibem uma não linearidade mais marcada, de forma que a extensão total do elemento será apenas distribuída por estas, sendo as restantes ignoradas.

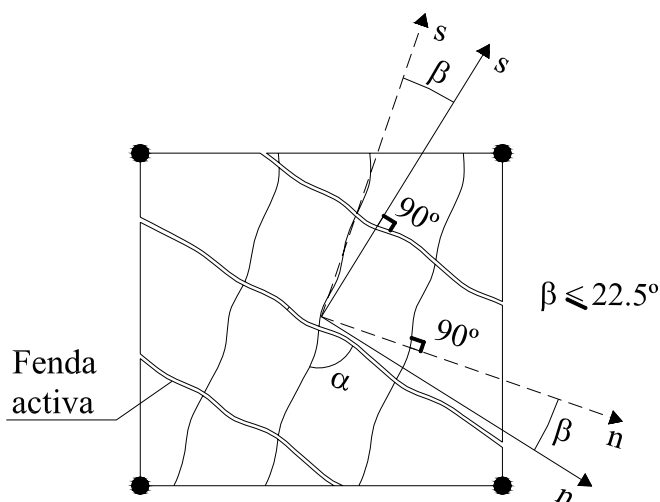


Figura 3.13– Conceito de fenda activa. Sistema de eixos quasi-ortogonais.

Quando duas fendas não são perfeitamente ortogonais, usando o conceito da fenda activa, o modelo de fendas fixas ortogonais pode ser utilizado com suficiente precisão se o ângulo α entre fissuras não se desviar demasiado dos 90°, tendo sido fixados os limites, $\alpha = 90 \pm 22.5^\circ$ (Maekawa et al. 2003). Na *Figura 3.13* está representado um elemento de betão armado nestas condições. Uma vez que a primeira fenda é formada, o sistema de eixos n, s é fixado. Aquando da formação da segunda fenda, o referencial é rodado conforme indicado, devendo, nestas circunstâncias, todas as leis constitutivas ser estabelecidas no sistema de eixos da fenda activa, identificada como sendo que tem a maior abertura, fazendo com que, durante o processo de carga, o sistema de eixos vá alternando. Note-se que este método é aproximado, na medida em que os parâmetros relativos à fenda dormente são calculados segundo um eixo que não lhe é perpendicular. No entanto, dado que a não linearidade da resposta é essencialmente

controlada pela fenda activa, e dado que o desvio em relação à perpendicular não é grande, os resultados obtidos são, em geral, aceitáveis.

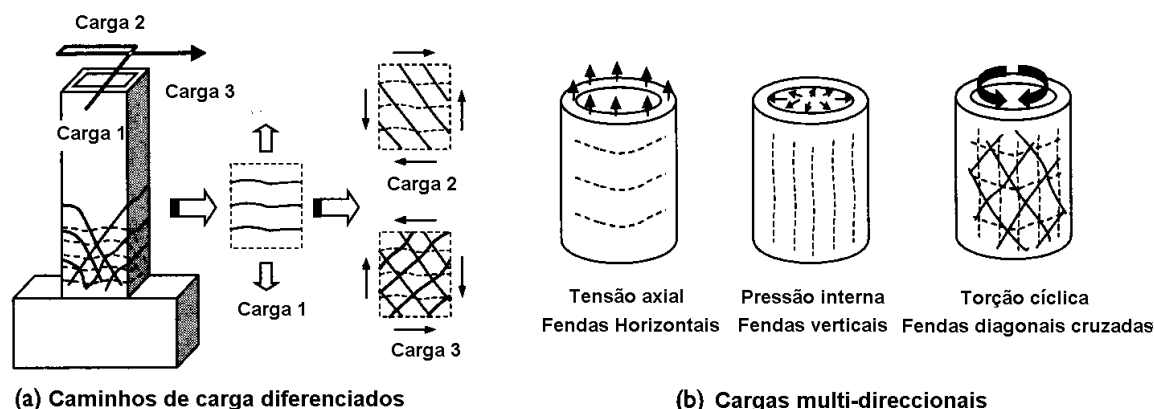


Figura 3.14– Exemplos de fissuras não ortogonais em elementos estruturais. Adaptado de (Maekawa et al. 2003)

No caso de ocorrência de fendas segundo ângulos inferiores aos acima estipulados (Figura 3.14), torna-se necessário introduzir um novo sistema independente de eixos n_2, s_2 . O sistema de eixos activo será aquele que contém a fenda com maior abertura. Detalhes sobre a implementação deste algoritmo, e uma extensiva verificação e validação do modelo contra resultados experimentais sobre os mais variados elementos estruturais e condições de carregamento, pode ser encontrada em (Maekawa et al. 2003).

3.2.3.2 - Modelos de fendas rotativas

Os modelos de fendas fixas obrigam, para além da definição de leis tensão/extensão para o betão comprimido e traccionado, à definição duma lei de transferência de tensões de corte entre as faces das fendas. A utilização de coeficientes empíricos de redução da rigidez de corte pode ser apontada como uma fraqueza conceptual do modelo. Mesmo as formulações mais sofisticadas, baseadas na mecânica do “aggregate interlock”, atrás referidas, falham em fornecer uma descrição fisicamente coerente do que se passa durante a fase de processamento da fractura. Por outro lado, os eixos de ortotropia deixam de coincidir com a direcção das tensões principais, dada a existência de corte no plano da fenda. As leis constitutivas do betão comprimido passam assim a ser expressas num referencial que não é o das tensões principais. Os modelos de fendas rotativas nasceram da tentativa de formular as relações constitutivas directamente no referencial das tensões principais, eliminando ainda a necessidade de introduzir uma lei entre as tensões de corte e as distorções.

Neste tipo de modelos admite-se a rotação dos eixos locais de ortotropia n, s, t , de modo a que coincidam com as direcções das extensões principais. Desta forma, a matriz de transformação \underline{T} deixa de ser constante, passando a ser uma função do tensor das extensões. Porém, num material ortotrópico a direcção das extensões principais não é necessariamente coincidente com

a direcção das tensões principais. De modo a garantir essa coaxialidade, os módulos de rigidez transversal G_{12} , G_{13} e G_{23} vêm dados pelas expressões constantes da relação tangencial (Crisfield e Wills 1989; Rots e Blaauwendraad 1989):

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{23} \\ \Delta\sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{22}} & \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{22}-\sigma_{33}}{2(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}-\sigma_{11}}{2(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\gamma_{23} \\ \Delta\gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Note-se que a expressão (3.28) é implícita, na medida em que depende do estado de tensão corrente. Dada a coincidência entre o sistema de eixos de ortotropia n , s , t e o sistema de eixos principal 1 , 2 , 3 , foi adoptado este último. A relação constitutiva expressa no referencial geral vem finalmente:

$$\dot{\underline{\sigma}}_{xyz} = \underline{T}(\underline{\varepsilon}_{xyz})^T \underline{D}_{nst} \underline{T}(\underline{\varepsilon}_{xyz}) \dot{\underline{\varepsilon}}_{xyz} \quad (3.29)$$

Os modelos de fendilhação distribuída foram extensivamente estudados por (Rots e Blaauwendraad 1989), tendo os modelos de fendas rotativas demonstrado alguma superioridade no tratamento de situações com propagação fendas localizadas em provetes de betão simples (Rots 2002), sendo o modelo deste tipo mais utilizado nestas circunstâncias (Jirasek e Zimmerman 1998a). Durante o processamento da fractura, fase em que a fissura não está ainda macroscopicamente formada, existindo apenas uma concentração de microfendas numa região de tamanho finito (a ZPF), o facto de se permitir a rotação dos eixos de ortotropia, equivale a considerar que apenas os microdefeitos mais activos controlam a resposta do material. Desta forma, durante a fase de processamento da fractura, o modelo de fendas rotativas aproxima melhor o comportamento do material, com a vantagem de ter implícito um módulo de rigidez de corte.

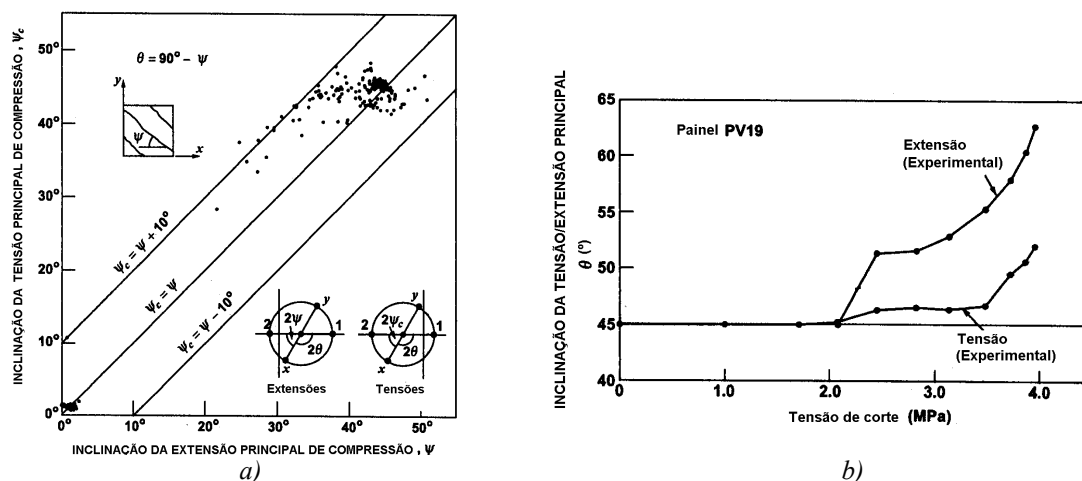


Figura 3.15– Desvio entre a direcção das tensões e das extensões principais médias em painéis de betão fortemente armado: a) Dados experimentais de (Vecchio e Collins 1986); b) resultados do painel PV19 com armadura anisotrópica, $\rho_x=1.8\%$ e $\rho_y=0.7\%$.

Os resultados experimentais de (Vecchio e Collins 1986) demonstraram também que, em painéis de betão fortemente armado, sujeitos a um estado de tensão uniforme de corte, a direcção das tensões e extensões principais médias sobre o painel, pode, sem grande margem de erro, ser considerada coincidente. No entanto, nos casos em que a diferença entre as percentagens de armadura nas duas direcções seja elevada, nomeadamente se numa delas a percentagem de armadura for reduzida, existe um desvio que pode ser significativo (Vecchio 2000) (Figura 3.15), sendo neste caso questionável o uso de formulações co-rotacionais.

O uso dos modelos de fendas rotativas deve restringir-se, porém, à análise de estruturas fortemente armadas e sujeitas a cargas proporcionais, sendo que no estudo de problemas de fractura existem outras formulações mais competitivas. Ao forçar a coaxialidade entre tensões e extensões principais, pressupõe-se, tal como nos modelos de escoras e tirantes, a existência de ductilidade suficiente para permitir a reorientação do campo de tensões. No caso de estruturas com pouca ou nenhuma armadura, ou com disposições de armadura fortemente anisotrópicas, os escorregamentos ao longo das faces das fissuras com maior desenvolvimento podem impedir as referidas reorientações do campo de tensões (Figura 3.15 b)), derrubando a hipótese da coaxialidade e podendo inclusivamente originar roturas frágeis. Por outro lado, em carregamentos altamente não proporcionais, o facto de se permitir a rotação dos eixos de ortotropia, leva a que se perca a memória dos efeitos das fases anteriores do carregamento, o que pode ser determinante para o cálculo da resposta estrutural (Maekawa et al. 2003). Embora alguns modelos de fendas rotativas tenham sido adaptados para a modelação de cargas cíclicas (Stevens et al. 1987; Vecchio 1999), os modelos de fendas fixas estão mais de acordo com a realidade física do problema.

3.3 – MODELOS DE FENDILHAÇÃO DISTRIBUÍDA COM DECOMPOSIÇÃO DAS EXTENSÕES

Os *modelos de fendilhação distribuída* (do inglês “*smeared crack models*”) correspondem a uma das formulações mais correntes para as leis constitutivas do betão traccionado correspondentes à descrição cinemática baseada em descontinuidades fracas. Esta formulação em particular foi originalmente proposta por (Borst e Nauta 1985; Rots et al. 1985). A extensão total é dividida em duas componentes, uma correspondente ao betão entre fissuras e a outra correspondente à própria fissura. Esta decomposição permite formular directamente, e de forma consistente, as leis do modelo da banda fendilhada a partir das relações tensão/abertura de fendas determinadas a partir de resultados experimentais, respeitando integralmente a lei constitutiva do betão não fendilhado, já que esta é formulada de forma independente. A fissuração pode ser assim combinada de forma transparente com a elasticidade, a plasticidade ou a viscoelasticidade, assim como com os efeitos da temperatura, numa formulação unificada (Borst 1987).

Tal como nos modelos de extensão total, o início do processo de fractura ocorre após a violação do critério da tensão máxima, estabelecido no espaço das tensões principais.

3.3.1 – Modelos de fendas fixas

Após violação do critério da tensão máxima, no referencial geral, e para o caso geral tridimensional, a decomposição é expressa por,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(6 \times 1)} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{(6 \times 1)}^{cr} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(6 \times 1)}^{co} \quad (3.30)$$

onde o expoente (cr) indica uma grandeza respeitante às fissuras e (co) uma grandeza respeitante ao betão não fissurado. Na expressão (3.30), o vector das extensões no referencial geral x,y,z vem dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(6 \times 1)} = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T \quad (3.31)$$

Note-se que será usada a notação de engenharia, pelo que as grandezas γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{zx} equivalem a duas vezes as correspondentes grandezas tensoriais ε_{xy} , ε_{yz} e ε_{zx} .

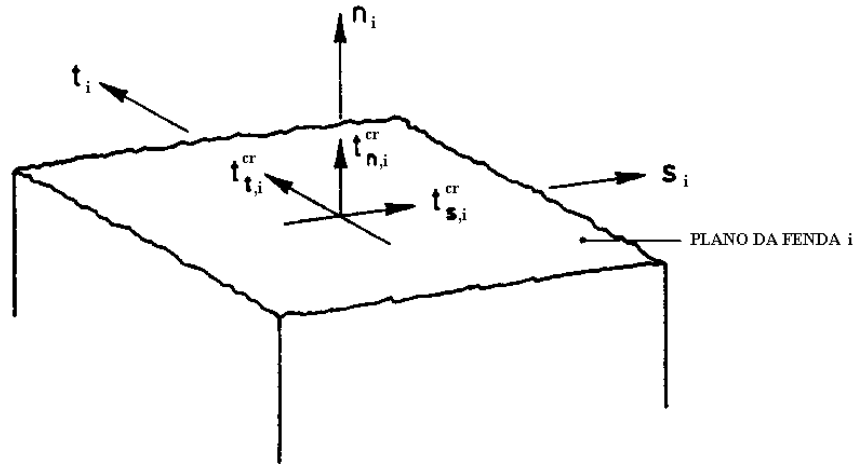


Figura 3.16– Referencial local da fenda. Adaptado de (Rots e Blaauwendraad 1989).

As relações constitutivas relativas à evolução da abertura das fissuras são estabelecidas no referencial local, n_i, s_i, t_i , que está alinhado com a fenda i (Figura 3.16). Neste referencial define-se o vector das extensões locais da fissura,

$$\mathbf{e}_i^{cr} = \left\{ \varepsilon_{nn,i}^{cr} \quad \gamma_{ns,i}^{cr} \quad \gamma_{nt,i}^{cr} \right\}^T \quad (3.32)$$

(3x1)

onde $\varepsilon_{nn,i}^{cr}$ é a extensão normal à fenda i , correspondente ao modo I de fractura, e $\gamma_{ns,i}^{cr}$ e $\gamma_{nt,i}^{cr}$ são as distorções da fenda i , correspondentes ao modo II e modo III, respectivamente.

As extensões da fenda i , no referencial global, podem ser obtidas a partir das do referencial local através de,

$$\underline{\varepsilon}_i^{cr} = \underline{N}_i \underline{e}_i^{cr} \quad (3.33)$$

(6x1) (6x3) (3x1)

em que \underline{N}_i é a matriz de transformação associada à fenda i , dada por:

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} l_{n,i}^2 & l_{n,i}l_{s,i} & l_{t,i}l_{n,i} \\ m_{n,i}^2 & m_{n,i}m_{s,i} & m_{t,i}m_{n,i} \\ n_{n,i}^2 & n_{n,i}n_{s,i} & n_{t,i}n_{n,i} \\ 2l_{n,i}m_{n,i} & l_{n,i}m_{s,i} + l_{s,i}m_{n,i} & l_{t,i}m_{n,i} + l_{n,i}m_{t,i} \\ 2m_{n,i}n_{n,i} & m_{n,i}n_{s,i} + m_{s,i}n_{n,i} & m_{t,i}n_{n,i} + m_{n,i}n_{t,i} \\ 2n_{n,i}l_{n,i} & n_{n,i}l_{s,i} + n_{s,i}l_{n,i} & n_{t,i}l_{n,i} + n_{n,i}l_{t,i} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Na expressão (3.34), $(l_{n,i}, m_{n,i}, n_{n,i})$, $(l_{s,i}, m_{s,i}, n_{s,i})$ e $(l_{t,i}, m_{t,i}, n_{t,i})$ são, respectivamente, as coordenadas dos versores dos eixos locais n_i , s_i e t_i da fissura i , expressas no sistema global x , y e z .

O vector com as tracções através da fissura i é definido no referencial local, e em correspondência com a *Figura 3.16*, por:

$$\underline{t}_i^{cr} = \left\{ t_{n,i}^{cr} \quad t_{s,i}^{cr} \quad t_{t,i}^{cr} \right\}^T \quad (3.35)$$

(3x1)

Na expressão (3.35), $t_{n,i}^{cr}$ é a tracção correspondente ao modo I de fractura na fissura i e $t_{s,i}^{cr}$, $t_{t,i}^{cr}$ são as tensões de corte na fissura i correspondentes aos modos II e III de fractura, respectivamente. A relação entre as tensões no referencial local e no referencial global é expressa por:

$$\underline{t}_i^{cr} = \underline{N}_i^T \underline{\sigma} \quad (3.36)$$

(3x1) (3x6) (6x1)

A relação constitutiva entre as tensões transmitidas através da fenda i e as correspondentes extensões vem dada por,

$$\dot{\underline{t}}_i^{cr} = \underline{D}_i^{cr} \dot{\underline{e}}_i^{cr} \quad (3.37)$$

(3x1) (3x3) (3x1)

O ponto por cima dos símbolos significa diferenciação em ordem ao tempo. Contudo a lei constitutiva é independente do tempo (“*rate independent*”), e o tempo desempenha apenas um papel formal de um parâmetro que controla o processo de carga. As expressões poderiam também ser formuladas na forma incremental, com as taxas de variação substituídas por incrementos. No caso mais geral, \underline{D}_i^{cr} é uma matriz cheia e não simétrica, de acordo com:

$$\underline{D}_i^{cr} = \begin{bmatrix} D_{11,i}^{cr} & D_{12,i}^{cr} & D_{13,i}^{cr} \\ D_{21,i}^{cr} & D_{22,i}^{cr} & D_{23,i}^{cr} \\ D_{31,i}^{cr} & D_{32,i}^{cr} & D_{33,i}^{cr} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A estrutura da equação (3.37) é tal que permite incorporar as relações entre a distorção e a tensão normal à fenda i , assim como a relação entre a extensão normal à fenda i com a tensão de corte (Borst 1991). Estes efeitos de acoplamento ocorrem em fissuras macroscópicas (com a fractura já totalmente desenvolvida) e podem ser obtidos a partir das relações constantes das teorias sobre o “*aggregate interlock*”, expostas em 2.3, que contemplam o comportamento dilatante das fissuras sob acções de corte. No entanto, durante o processo de microfendilhação, ou seja, antes de se esgotar a energia de fractura, não existem dados experimentais que sustentem qualquer teoria sobre estes efeitos, pelo que usualmente são desprezados. Desta forma, a matriz \underline{D}_i^{cr} é geralmente considerada diagonal:

$$\underline{D}_i^{cr} = \begin{bmatrix} D_{I,i}^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & D_{II,i}^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III,i}^{cr} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Na expressão (3.39), os termos da diagonal correspondem, respectivamente, aos módulos de rigidez dos modos *I*, *II* e *III* de fractura.

Para completar o modelo constitutivo é necessária uma relação entre a taxa de variação das tensões e a taxa de variação das extensões no betão intacto. Para essa relação assume-se a forma:

$$\dot{\underline{\sigma}}_{(6 \times 1)} = \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \dot{\underline{\epsilon}}_{(6 \times 1)}^{co} \quad (3.40)$$

Tendo em atenção a igualdade (3.30) e (3.33), vem:

$$\dot{\underline{\sigma}}_{(6 \times 1)} = \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \left[\dot{\underline{\epsilon}}_{(6 \times 1)} - \underline{N}_i \dot{\underline{\epsilon}}_{(6 \times 3)}^{cr} \right] \quad (3.41)$$

Pré-multiplicando (3.41) por \underline{N}_i^T e atendendo a (3.36) e (3.37), chega-se à relação entre a taxa de variação das extensões das fissuras no referencial local e a taxa de variação das extensões totais no referencial global,

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{(3 \times 1)}^{cr} = \left[\underline{D}_{(3 \times 3)}^{cr} + \underline{N}_i^T \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \underline{N}_i \right]^{-1} \underline{N}_i^T \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \dot{\underline{\epsilon}}_{(6 \times 1)} \quad (3.42)$$

que uma vez substituída em (3.41), conduz à relação geral entre taxas de variação das tensões e extensões totais no referencial geral,

$$\dot{\underline{\sigma}}_{(6 \times 1)} = \underline{D}_{(6 \times 6)}^{crco} \dot{\underline{\epsilon}}_{(6 \times 1)} \quad (3.43)$$

onde o expoente (crco) se refere ao betão fendilhado. A matriz \underline{D}^{crco} vem expressa por:

$$\underline{D}_{(6 \times 6)}^{crco} = \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \left[\underline{I}_{(6 \times 6)} - \underline{N}_i \left[\underline{D}_{(3 \times 3)}^{cr} + \underline{N}_i^T \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \underline{N}_i \right]^{-1} \underline{N}_i^T \underline{D}_{(6 \times 6)}^{co} \right] \quad (3.44)$$

A implementação computacional de (3.43) requer a sua formulação em termos incrementais, o que pressupõe uma linearização na vizinhança do estado de tensão corrente. No entanto, (3.43) é uma equação implícita, pois no caso das leis constitutivas do betão intacto e/ou das fissuras serem não lineares, o cálculo do incremento de tensão $\Delta \underline{\sigma}$ requer um processo iterativo interno, ou seja, a forma incremental de (3.43) permanece verdadeira apenas se \underline{D}^{co} e

\underline{D}^{cr} permanecerem constantes durante o incremento de extensão. O caso da não linearidade em \underline{D}^{co} é tratado de acordo com o modelo adoptado para o comportamento do betão não fendilhado. No que diz respeito à não linearidade em \underline{D}^{cr} , procedimentos iterativos tipo são referidos em (Barros 1995; Rots e Blaauwendraad 1989). Um procedimento robusto para o tratamento simultâneo de ambas as situações está referido em (Cervenka et al. 2002). Note-se que estes são ciclos iterativos internos da lei constitutiva, independentes das iterações associadas ao cálculo do estado de equilíbrio global, próprias dos cálculos não lineares. Este facto constitui uma desvantagem dos modelos de fendilhação distribuída com decomposição das extensões, na medida em que encarece as análises computacionais.

Nos modelos com decomposição das extensões, o modulo de rigidez $D_{I,i}^{cr}$, correspondente ao modo I de fractura da fenda i , é determinado de acordo com o modelo da banda fendilhada, por regularização directa do campo de extensões do modelo da fenda fictícia, considerando que,

$$\varepsilon_{nn,i}^{cr} = \frac{w_i}{h_i} \quad (3.45)$$

onde w_i é a abertura da fenda fictícia correspondente à fissura i e h_i é a correspondente largura de banda fendilhada (Figura 3.17), resultando em:

$$D_{I,i}^{cr} = - \frac{1}{k(\varepsilon_{nn,i}^{cr})} \frac{f_{ct}^2 h_i}{G_F} \quad (3.46)$$

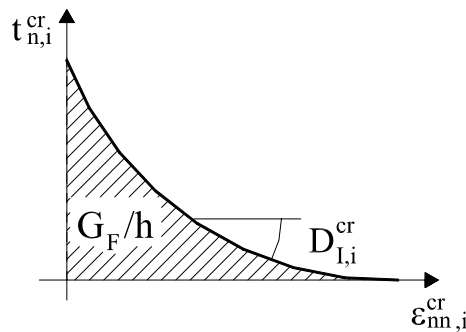


Figura 3.17 – Definição do modulo de rigidez correspondente ao modo I de fractura.

Na expressão (3.46), $k(\varepsilon_{nn,i}^{cr})$ é uma função escalar da extensão normal à fissura. No caso de um diagrama de amolecimento linear toma um valor constante igual a 2. A extensão última vem dada por (3.47), onde ξ é uma constante dependente da forma do diagrama, sendo também igual a 2 no caso de um diagrama de amolecimento linear.

$$\varepsilon_{nn,i}^{cr,u} = \frac{\xi G_F}{f_{ct} h_i} \quad (3.47)$$

Na presença de armadura aderente em quantidade superior à mínima, e caso não se tenham introduzido elementos de interface com leis “*bond slip*” entre os elementos de armadura e os elementos de betão, não devem ser utilizadas as leis de amolecimento da mecânica da fractura não linear, mas antes os diagramas de retenção de tensões de tracção no betão, conforme exposto em 2.6.1. Estes diagramas são usualmente formulados em termos de extensões totais, pelo que sua formulação nos modelos com decomposição das extensões deve ser feita de acordo com a *Figura 3.18* e a determinação de $D_{I,i}^{cr}$ de acordo com (3.48). Note-se que neste caso, nem o módulo de rigidez $D_{I,i}^{cr}$, nem a extensão última do diagrama dependem do tamanho do elemento finito, não sendo aplicáveis as expressões (3.46) e (3.47).

$$\frac{1}{\mu E} = \frac{1}{E} + \frac{1}{D_{I,i}^{cr}} \Rightarrow D_{I,i}^{cr} = \frac{\mu}{1 - \mu} E \quad (3.48)$$

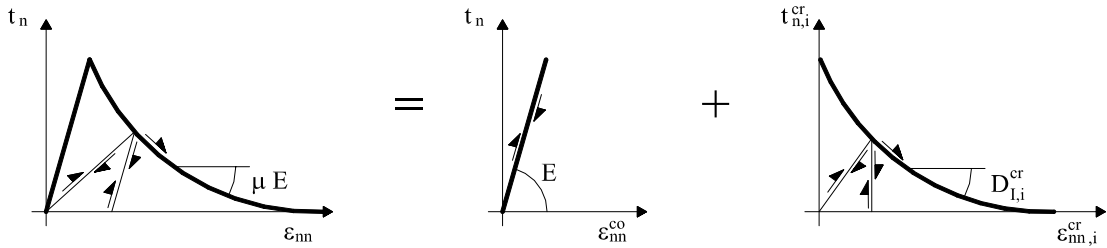


Figura 3.18— Definição do módulo de rigidez correspondente a um diagrama de “tension stiffening” formulado em extensões totais.

Tal como nos modelos sem decomposição das extensões, assume-se que, após a formação da banda fendilhada, a rigidez de corte se reduz. No caso de se adoptar uma rigidez de corte do tipo βG , semelhante à já mencionada nos modelos baseados em extensões totais, o módulo de rigidez associado ao modo II vem dado por (3.49), estando esquematizada na *Figura 3.19* a sua representação gráfica no caso de β ser constante. O modo III tem um tratamento semelhante ao referido para o modo II.

$$\frac{1}{\beta G} = \frac{1}{G} + \frac{1}{D_{II,i}^{cr}} \Rightarrow D_{II,i}^{cr} = \frac{\beta}{1 - \beta} G \quad (3.49)$$

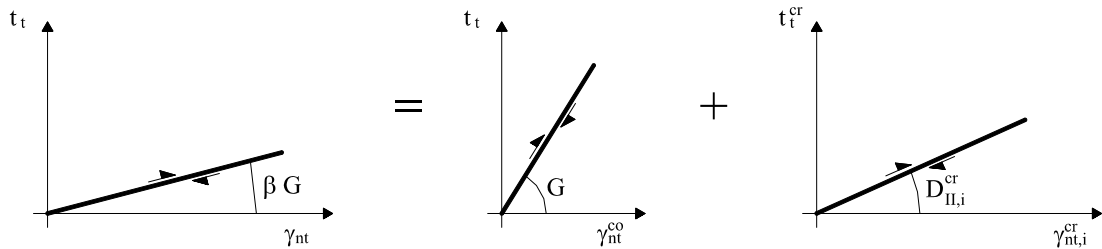


Figura 3.19 – Determinação do módulo de rigidez correspondente ao modo II de fractura.

O tratamento de situações correspondentes a mudanças de estado (formação, fecho ou reabertura de fendas) requer a divisão do incremento em duas partes, uma referente ao estado anterior, $\Delta \underline{\varepsilon}_a$, e outra referente ao novo estado, $\Delta \underline{\varepsilon}_b$, tais que (Rots e Blaauwendraad 1989):

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \Delta \underline{\varepsilon}_a + \Delta \underline{\varepsilon}_b \quad (3.50)$$

O incremento de tensão é então determinado a partir de relações tensão-extensão distintas, sendo,

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}^{co} \Delta \underline{\varepsilon}_a + \underline{D}^{crco} \Delta \underline{\varepsilon}_b \quad (3.51)$$

no caso de abertura ou reabertura de uma fissura, e,

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}^{crco} \Delta \underline{\varepsilon}_a + \underline{D}^{co} \Delta \underline{\varepsilon}_b \quad (3.52)$$

no caso de fecho de uma fissura. Note-se que o cálculo de cada uma das parcelas de (3.50) requer um processo iterativo sempre que as matrizes \underline{D}^{crco} e \underline{D}^{co} não sejam constantes.

Nos modelos de fendilhação distribuída, a localização da fractura envolve descargas nos elementos finitos adjacentes, muitos dos quais se apresentam no estado fendilhado, pois violaram o critério da tensão máxima, sem no entanto a fractura ter progredido (fendilhação espúria). Para a correcta obtenção de deformações localizadas é essencial, mesmo em carregamentos proporcionais, adoptar um critério para o comportamento da fissura em situações de fecho e reabertura. Duas situações extremas estão representadas na *Figura 3.18*, uma apresentando uma descarga/recarga secante para a origem e a outra um comportamento elástico. Comportamentos intermédios são mais realistas, estando formulados por exemplo em (Barros 1995). Apesar de menos realista, a descarga elástica apresenta-se como a de tratamento numérico mais robusto, na medida em que o fecho abrupto da fissura significa que esta deixa automaticamente de contribuir para \underline{D}^{crco} . Porém, no caso de carregamentos não proporcionais, a descarga elástica não é adequada. As mudanças de estado são dominadas pelo modo I, assumindo-se um comportamento independente do modo II de fractura. Desta forma, é possível que uma fenda esteja activa no modo I e inactiva no modo II, inactiva no modo I e activa no modo II, inactiva em ambos os modos ou activa em ambos os modos. O manuseamento preciso de todos estes estados é uma matéria delicada (Rots e Borst 1987).

3.3.2 – Modelos de múltiplas fendas fixas

Nos modelos de fendas fixas admite-se que, assim que é violado o critério da tensão máxima, se forma uma banda fendilhada com orientação perpendicular à tensão principal de tracção. A direcção da banda fendilhada permanece fixa, e o sistema de eixos locais assim determinado

define as direcções de ortotropia do material. Porém, dado que existe transmissão de tensões de corte, as tensões principais podem rodar, e o critério da tensão máxima voltar a ser violado.

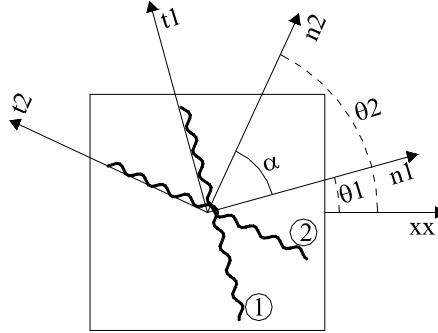


Figura 3.20– Representação bidimensional da ocorrência de duas fendas não ortogonais no mesmo ponto de amostragem. Definição do “threshold angle” α .

Uma das grandes vantagens dos modelos com decomposição das extensões reside na simplicidade conceptual com que permitem lidar de forma rigorosa com situações de múltiplas fendas fixas (Figura 3.20). No referencial global, o vector com as extensões correspondentes às n fissuras vem dado por:

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{(6 \times 1)}^{cr} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{(6 \times 1)}^{cr_i} \quad (3.53)$$

Para formular as relações constitutivas é conveniente assemblar todos os vectores com as extensões no referencial local num só vector:

$$\underline{\underline{e}}_{(3n \times 1)}^{cr} = \left\{ \underline{\underline{e}}_{(1 \times 3)}^{cr_1 T} \quad \cdots \quad \underline{\underline{e}}_{(1 \times 3)}^{cr_i T} \quad \cdots \quad \underline{\underline{e}}_{(1 \times 3)}^{cr_n T} \right\}^T \quad (3.54)$$

Definindo a matriz de transformação,

$$\underline{\underline{N}}_{(6 \times 3n)} = \left[\underline{\underline{N}}_{(6 \times 3)}^1 \quad \cdots \quad \underline{\underline{N}}_{(6 \times 3)}^i \quad \cdots \quad \underline{\underline{N}}_{(6 \times 3)}^n \right] \quad (3.55)$$

é possível reescrever (3.33) para todas as fendas numa só expressão:

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{(6 \times 1)}^{cr} = \underline{\underline{N}}_{(6 \times 3n)} \underline{\underline{e}}_{(3n \times 1)}^{cr} \quad (3.56)$$

Da mesma forma, é possível definir o vector $\underline{\underline{t}}^{cr}$,

$$\underline{\underline{t}}_{(3n \times 1)}^{cr} = \left\{ \underline{\underline{t}}_{(1 \times 3)}^{cr_1 T} \quad \cdots \quad \underline{\underline{t}}_{(1 \times 3)}^{cr_i T} \quad \cdots \quad \underline{\underline{t}}_{(1 \times 3)}^{cr_n T} \right\}^T \quad (3.57)$$

vindo a relação constitutiva expressa por,

$$\underset{(3nx1)}{\underline{\dot{t}}}^{cr} = \underset{(3nx3n)}{\underline{D}}^{cr} \underset{(3nx1)}{\underline{\dot{e}}}^{cr} \quad (3.58)$$

onde,

$$\underset{(3nx3n)}{\underline{D}}^{cr} = \begin{bmatrix} \underset{(3x3)}{\underline{D}}_1^{cr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underset{(3x3)}{\underline{D}}_2^{cr} & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underset{(3x3)}{\underline{D}}_n^{cr} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Usualmente a matriz \underline{D}^{cr} é diagonal por blocos, sendo desta forma ignorada a interacção entre as diferentes fissuras. Embora seja formalmente possível incluir este efeito, através da introdução dos blocos fora da diagonal, não existe ainda enquadramento teórico para a sua formulação. A relação entre as tensões no referencial global e no referencial local vem dada por:

$$\underset{(3nx1)}{\underline{t}}^{cr} = \underset{(3nx6)}{\underline{N}}^T \underset{(6x1)}{\underline{\sigma}} \quad (3.60)$$

Repetindo os mesmos passos que levaram à determinação de (3.43) e (3.44), chega-se à matriz de rigidez do betão fendilhado,

$$\underset{(6x6)}{\underline{D}}^{crco} = \underset{(6x6)}{\underline{D}}^{co} \left[\underset{(6x6)}{\underline{I}} - \underset{(6x3n)}{\underline{N}} \left[\underset{(3nx3n)}{\underline{D}}^{cr} + \underset{(3nx6)}{\underline{N}}^T \underset{(6x6)}{\underline{D}}^{co} \underset{(6x3n)}{\underline{N}} \right]^{-1} \underset{(3nx6)}{\underline{N}}^T \underset{(6x6)}{\underline{D}}^{co} \right] \quad (3.61)$$

A possibilidade de existência de múltiplas fendas fixas obriga à definição de critérios de abertura de novas fendas. Em (Rots e Blaauwendraad 1989) são distinguidos quatro critérios:

- a) A tensão principal de tracção σ_I viola o critério da tensão máxima.
- b) A direcção da tensão principal de tracção faz um ângulo, com as direcções das fendas existentes, superior a um valor limite fornecido α (“*threshold angle*”).
- c) Ambas as condições a) e b) são violadas.
- d) Quaisquer das condições a) ou b) são violadas.

Apesar da condição a) limitar a tensão máxima no betão, não controla o número total de fendas, o que de um ponto de vista numérico é muito pouco eficiente. A ocorrência de um grande número de fissuras no mesmo ponto de amostragem coloca problemas de condicionamento da matriz de rigidez, assim como aumenta significativamente a dificuldade em lidar com situações de mudança de estado (relacionadas com a formação, fecho e reabertura de fendas) (Rots e

Blaauwendraad 1989). Este será um critério aceitável apenas em situações em que a capacidade de transferência de tensões de corte diminui acentuadamente durante o processo de fendilhação (Barros 1995).

A condição b) obriga à definição de um novo parâmetro, o ângulo limite α , introduzindo uma certa ambiguidade no processo de abertura de uma nova fenda. Por outro lado, permite a violação do critério da tensão máxima, que tem um significado físico claro, sem que se forme uma nova banda fendilhada. Como vantagem apresenta o facto de limitar o número total de fissuras por ponto de amostragem.

O critério c) apresenta as duas desvantagens do critério b). Sendo o critério mais restritivo, apresenta-se como o mais estável do ponto de vista numérico.

Ao critério d) podem-se apontar as mesmas dificuldades já referidas para o critério a), acrescidas do facto de este ser o critério mais permissivo no que respeita à formação de novas fissuras.

Em (Barros 1995; Rots e Blaauwendraad 1989) são expostos alguns procedimentos relativos à implementação de qualquer um dos quatro critérios acima mencionados, nomeadamente considerações relativas ao consumo da energia de fractura por parte de cada uma das bandas fendilhadas e definição dos parâmetros a ser guardados em memória para correcta simulação da história de fendilhação em carregamentos altamente não proporcionais.

3.3.3 - Modelos de fendas rotativas

Neste tipo de modelos, a matriz de transformação \underline{N} deixa de ser fixa, e passa a ser uma função do tensor das extensões totais ε_{ij} . De acordo com o exposto em 3.2.3.2, de modo a garantir a coaxialidade entre tensões e extensões principais, a rigidez de corte de um modelo de fendas rotativas, vem dada por:

$$\beta G_{ij} = \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{2(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})} \quad (3.62)$$

Nos modelos com decomposição das extensões, de acordo com (3.49) e atendendo a (3.62), os módulos de rigidez transversal das fendas vêm expressos por,

$$\begin{aligned} D_{II}^{cr} &= \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})G}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})G - (\sigma_{11} - \sigma_{22})} \\ D_{III}^{cr} &= \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})G}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})G - (\sigma_{11} - \sigma_{33})} \end{aligned} \quad (3.63)$$

em que, dada a coincidência entre os sistema de eixos local n_b, s_b, t_b e o sistema principal 1, 2 e 3, foi adoptado este último.

3.3.4 – Algumas considerações sobre o uso de modelos de fendas distribuídas

Os modelos de fendilhação distribuída foram extensivamente estudados por (Rots 2002; Rots e Blaauwendraad 1989; Rots e Borst 1987; Rots et al. 1985), tendo essencialmente sido detectados três tipos fundamentais de problemas associados ao seu uso na modelação da fractura localizada: ocorrência de instabilidades numéricas originadas por modos de deformação espúrios, falta de objectividade da direcção das fendas com respeito à malha de elementos finitos utilizada (“*mesh-induced directional bias*”) e transferência espúria de tensões (“*stress locking*”).

O primeiro fenómeno está relacionado com o facto de, no caso de fendas com grandes aberturas, a matriz de rigidez do elemento conter muitos termos quase nulos. Por outro lado, dado que, em geral, não é modelada a variação das propriedades do material, problemas de instabilidade da solução podem surgir, relacionados com a existência de estados de equilíbrio alternativos. Com efeito, quando duas fendas se iniciam em simultâneo em dois pontos de Gauss próximos, a localização das deformações impõe que uma delas se propague enquanto que a outra regride e deve fechar. Esta escolha é delicada e algo arbitrária, sendo, em rigor, necessária uma análise de bifurcação para determinar qual o estado de equilíbrio correcto (Rots et al. 1985). Nos modelos com múltiplas fendas fixas este aspecto pode ser ainda mais evidente, contribuindo para possíveis dificuldades no processo de convergência da solução numérica.

A falta de objectividade do padrão de fendilhação em relação à malha de elementos finitos utilizada reflecte-se na tendência demonstrada pelas fissuras em se propagarem paralelamente aos lados dos elementos finitos. Este facto conduz, por um lado, à obtenção de soluções mais rígidas do que as observadas experimentalmente, introduzindo deformações de corte no plano das fendas, e por outro, a dificuldades de convergência. Estas consequências atenuam-se, mas não desaparecem totalmente, com o refinamento da malha (Li e Zimmerman 1998). As formulações não locais eliminam este problema, conforme demonstrado por (Bazant e Lin 1989).

A transferência espúria de tensões é uma consequência da descrição cinemática baseada no conceito das descontinuidades fracas, que não representa convenientemente o campo de deslocamentos nas proximidades de uma fenda macroscópica. Este fenómeno é responsável pelo carácter difuso do padrão de fendilhação observado em muitos exemplos, nomeadamente quando as fendas não são paralelas aos lados do elemento finito, assim como pelo enrijecimento artificial da resposta observado no regime de amolecimento (*Figura 3.21*). Nos modelos de fendas fixas, este facto é devido à transferência espúria de tensões de corte através de fissuras

que não estão perfeitamente alinhadas com o padrão macroscópico da fractura (Jirasek 2002c; Rots et al. 1985), podendo ser atenuado com a utilização de um factor de retenção de tensões de corte β aproximadamente nulo (Rots e Blaauwendraad 1989). Porém, nos modelos de fendas rotativas, não existe transmissão de tensões de corte no plano das fendas, e ainda assim, este efeito faz-se sentir. Em (Jirasek 2002c) é apresentada uma explicação para a origem do “*stress locking*” e que, dada a sua utilidade para a compreensão do fenómeno, a seguir se passa a expor.

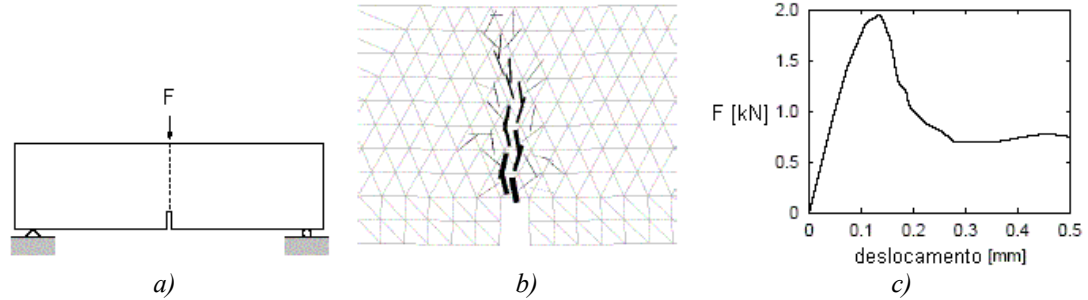


Figura 3.21 – Ensaio de flexão numa viga entalhada: a) Geometria e carregamento; b) Padrão numérico de fractura; c) Enrijecimento artificial da resposta na fase de amolecimento devido ao “*stress locking*” (Jirasek 2002c).

Considere-se um corpo sujeito a um estado de tensão uniforme e uniaxial, cuja magnitude σ aumenta até se atingir a resistência à tracção do material. O material entra em regime de amolecimento, e o dano localiza-se numa banda perpendicular à tensão principal máxima. Tomando o sistema de eixos ilustrado na Figura 3.22, o campo de deslocamentos elásticos é dado por,

$$\begin{aligned} u_e(x, y) &= u_0 + \frac{\sigma}{E} x \\ v_e(x, y) &= v_0 - \frac{\nu \sigma}{E} y \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde E é o módulo de Young, e ν o coeficiente de Poisson. Após o início do processo de fractura, o deslocamento horizontal dos pontos à direita da fenda fictícia virá acrescentado de w_{cr} ,

$$\begin{aligned} u_{cr}(x, y) &= w_{cr} \\ v_{cr}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Supondo que o campo de extensões é avaliado pelo método dos elementos finitos, considerando um elemento triangular de três nós, a relação $\underline{\varepsilon} = \underline{B}\underline{u}$ pode, equivalentemente, ser dada por,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

onde A é a área do elemento, u_i e v_i são os deslocamentos nodais e x_i e y_i são as coordenadas nodais.

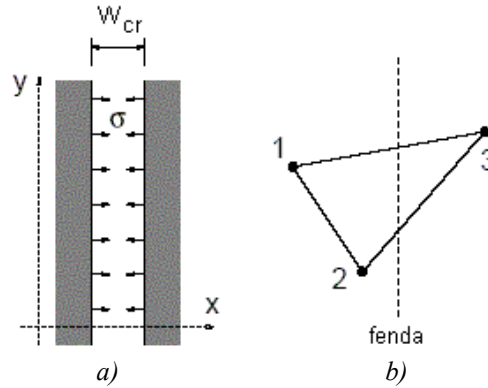


Figura 3.22 –a) Fenda coesiva num campo uniforme de tensões. b) Elemento finito triangular de três nós sobre o qual a abertura da fenda é disseminada (Jirasek 2002c).

Antes do início do processo de fractura, em fase elástica, o campo de extensões correspondente ao campo de tensões uniforme que origina o campo de deslocamentos (3.64) vem dado por,

$$\underline{\varepsilon}_e = \underline{D}_e^{-1} \underline{\sigma} = \frac{\sigma}{E} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\nu \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

Obviamente que o elemento finito triangular com campo de deslocamentos linear consegue reproduzir este estado de deformação, bastando que,

$$\begin{aligned} u_i - u_j &= \frac{\sigma}{E} (x_i - x_j) \\ v_i - v_j &= -\frac{\nu \sigma}{E} (y_i - y_j) \end{aligned} \quad (3.68)$$

conforme se pode constatar a partir da substituição de (3.68) em (3.66). Após o início do processo de fractura, aplicando o princípio da decomposição das extensões, e tendo em atenção que apenas a diferença entre os deslocamentos u_3 e u_1 vem afectada pela abertura w_{cr} :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{B} \underline{u}_{cr} = \frac{\sigma}{E} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\nu \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{w_{cr}}{2A} \begin{Bmatrix} y_1 - y_2 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

O campo de extensões apenas seria devidamente reproduzido se a abertura da fenda coesiva apenas originasse uma extensão segundo xx . Contudo, a equação (3.69) indica que este apenas será o caso se $x_2 - x_1 = 0$, ou seja, se o lado 1-2 do elemento for paralelo à fenda. Para um posicionamento qualquer do elemento relativamente à direcção da fissuração, uma distorção espúria,

$$\gamma_{xy} = \frac{x_2 - x_1}{2A} w_{cr} \quad (3.70)$$

é gerada pela interpolação decorrente do método dos elementos finitos. Este facto acarreta também que as direcções das extensões principais deixam de estar alinhadas com a fenda, isto é, vão-se desviar das direcções principais do campo de extensões real. À medida que o processo de fractura progride, as extensões correspondentes à fenda vão dominar sobre as extensões elásticas, e o ângulo de desvio das direcções principais de deformação tende para:

$$\alpha = \lim_{w_{cr} \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \quad (3.71)$$

Na *Figura 3.23* está representada a direcção definida pelo ângulo assim determinado, onde claramente se pode ver que se desvia acentuadamente da orientação correcta.

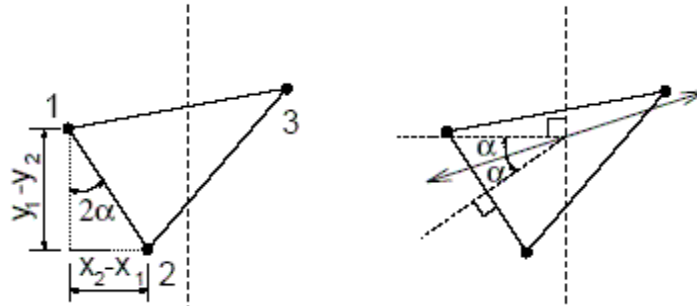


Figura 3.23 – Direcção da direcção da extensão principal máxima.

Focando agora a atenção sobre a fase do processo de fractura em que a fenda macroscópica já está praticamente desenvolvida, pode-se considerar que as tensões transmitidas através da fenda coesiva são já negligenciáveis. Se esta situação fosse realisticamente reproduzida pelo modelo de elementos finitos, cada uma das partes do corpo mover-se-ia como um corpo rígido e as extensões elásticas seriam nulas. Neste caso, as extensões avaliadas do modelo de elementos finitos são inteiramente devidas à componente da deformação devida à fenda,

$$\varepsilon_x = \frac{y_1 - y_2}{2A} w_{cr}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{x_2 - x_1}{2A} w_{cr} \quad (3.72)$$

Num modelo de fendas fixas, desprezando o efeito de Poisson no betão fendilhado, as tensões no referencial de ortotropia, que coincide com o referencial geral, vêm dadas por,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{y_1 - y_2}{2A} \\ 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{2A} \end{Bmatrix} w_{cr} \Leftrightarrow \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_{xy} = \beta G \frac{x_2 - x_1}{2A} w_{cr} \quad (3.73)$$

Demonstra-se assim que, nos modelos de fendas fixas, ocorre a transmissão de uma tensão de corte espúria, proporcional ao factor de retenção de tensões de corte β .

Nos modelos de fendas rotativas as relações constitutivas são estabelecidas no sistema de eixos principal. As correspondentes extensões principais são dadas por,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y + cs \gamma_{xy} = \left[c^2 (y_1 - y_2) + cs (x_2 - x_1) \right] \frac{w_{cr}}{2A} \\ \varepsilon_2 &= s^2 \varepsilon_x + c^2 \varepsilon_y - cs \gamma_{xy} = \left[s^2 (y_1 - y_2) - cs (x_2 - x_1) \right] \frac{w_{cr}}{2A} \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $c = \cos \alpha$ e $s = \sin \alpha$. Notando que, de acordo com (3.71), se tem,

$$x_2 - x_1 = (y_2 - y_1) \tan 2\alpha = (y_2 - y_1) \frac{2cs}{c^2 - s^2} \quad (3.75)$$

pelo que as extensões principais podem ser expressas por,

$$\varepsilon_1 = (y_1 - y_2) \frac{c^2}{c^2 - s^2} \frac{w_{cr}}{2A}, \quad \varepsilon_2 = (y_1 - y_2) \frac{s^2}{c^2 - s^2} \frac{w_{cr}}{2A} = -\frac{s^2}{c^2} \varepsilon_1 \quad (3.76)$$

Isto significa que a extensão principal máxima é positiva enquanto que a outra é negativa. À medida que a fenda abre, os valores absolutos das duas extensões principais aumentam. No modelo de fendas rotativas, dada a hipótese de coaxialidade, as tensões principais correspondentes vêm dadas por,

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = E \varepsilon_2 = -\frac{(y_1 - y_2)}{2A} \frac{s^2}{c^2 - s^2} E w_{cr} \quad (3.77)$$

que transformadas de novo para o sistema de eixos global xy dão origem a,

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{(y_1 - y_2)}{2A} \frac{s^4}{c^2 - s^2} E w_{cr} \\
\sigma_y &= -\frac{(y_1 - y_2)}{2A} \frac{c^2 s^2}{c^2 - s^2} E w_{cr} \\
\sigma_{xy} &= \frac{(y_1 - y_2)}{2A} \frac{c s^3}{c^2 - s^2} E w_{cr}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Note-se que as três componentes do campo de tensões são não nulas, crescendo proporcionalmente à abertura da fenda. Consequentemente o elemento transfere, indevidamente, tensões entre as duas partes separadas do corpo.

As tensões espúrias assim geradas poderiam crescer indefinidamente. No entanto, as condições de compatibilidade com os elementos adjacentes obrigam à ocorrência de tracções, que são responsáveis pela ocorrência de fendas adicionais, sem significado físico e resultantes do mecanismo atrás referido, que naturalmente limitam o seu valor. Estas fissuras adicionais contribuem para o padrão difuso de fissuração que é calculado, nomeadamente quando se está perante a propagação de fendas não paralelas aos lados dos elementos finitos (*Figura 3.21 b*). Este fenómeno não é exclusivo dos elementos triangulares com funções de forma lineares. Elementos com funções de forma de ordem mais alta oferecem uma descrição cinemática mais flexível, podendo, através de ajustamentos no campo de deslocamentos interpolado, relaxar parte da transmissão espúria de tensões, sem no entanto eliminar o problema. O “*stress locking*” também não é exclusivo dos modelos de fendilhação distribuída. A rotação dos eixos principais de deformação e a existência de uma extensão principal lateral negativa é necessariamente produzida pela interpolação por elementos finitos. Um raro exemplo de uma família de modelos imunes a estas deficiências será a dos modelos de dano isotrópico, para o qual as tensões desaparecem totalmente em todas as direcções (isotropia) assim que o parâmetro de dano atinge o valor unitário. Para mais pormenores consultar (Jirasek e Zimmerman 1998a; Jirasek e Zimmerman 1998b).

3.4 – MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS

3.4.1 – Formulação geral

Existem vários pontos de partida para o desenvolvimento das formulações elasto-plásticas. Tradicionalmente é utilizado o modelo reológico da *Figura 3.24*, que conduz ao estabelecimento de relações elasto-plásticas uniaxiais, dando origem a dois formatos de elasto-plasticidade, um baseado em extensões totais – a teoria da deformação plástica (“*deformation theory of plasticity*”) – e outro baseado em relações incrementais – a teoria do escoamento

plástico (“*plastic flow theory*”). Este segundo formato é o mais correntemente utilizado, fornecendo uma aproximação directa à definição de leis constitutivas diferenciais, conduzindo a formulações incrementais, e portanto, genericamente aplicáveis a qualquer tipo de carregamento. Uma dedução das expressões que governam a teoria do escoamento plástico, efectuada a partir do modelo da *Figura 3.24*, está descrita em (Borst 1991), sendo enriquecedora do ponto de vista da percepção física das variáveis intervenientes.

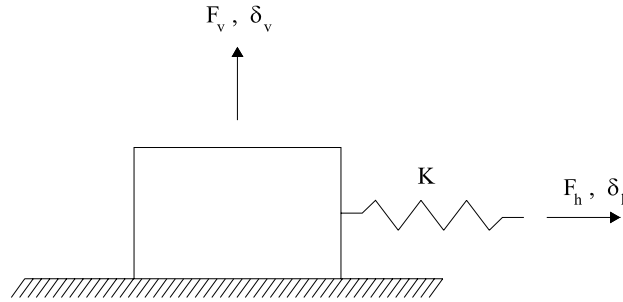


Figura 3.24 – Modelo reológico elasto-plástico com dois graus de liberdade. Associação em série de uma mola elástica com um elemento friccional.

Na teoria do escoamento plástico admite-se que o estado corrente dum volume elementar de material é totalmente caracterizado pela extensão total $\underline{\varepsilon}$, pela extensão plástica $\underline{\varepsilon}_p$ e por um conjunto de n variáveis internas escalares, de alguma forma relacionadas com a parcela plástica da deformação, e que podem ser assimiladas num vector \underline{k} . Estas variáveis internas caracterizam mudanças irreversíveis ao nível da microestrutura do material que macroscopicamente se expressam por endurecimento ou por amolecimento. As equações básicas incluem a decomposição da extensão total numa parcela reversível, a extensão elástica, e numa parcela irreversível e não decrescente, a extensão plástica:

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}_e + \dot{\underline{\varepsilon}}_p \quad (3.79)$$

Incluem ainda a lei tensão-extensão para a parte elástica,

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_e \underline{\varepsilon}_e \quad (3.80)$$

a condição de cedência,

$$f(\underline{\sigma}, \underline{h}) \leq 0 \quad (3.81)$$

a lei de endurecimento, constituída pela definição das n variáveis internas, agrupadas no vector \underline{k} , geralmente definidas pela equação diferencial

$$\dot{\underline{k}} = \dot{\lambda} \underline{q}(\underline{\sigma}, \underline{k}) \quad (3.82)$$

e pelas m funções das variáveis internas, coligidas no vector,

$$\underline{h} = \underline{h}(\underline{k}) \quad (3.83)$$

Por fim temos ainda a lei de escoamento,

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.84)$$

No que acima se expôs, $\dot{\underline{\varepsilon}}$ é o vector com a taxa de variação das extensões. A evolução do tensor das extensões elásticas $\dot{\underline{\varepsilon}}_e$ está relacionada com o tensor das tensões através da relação constitutiva (3.80), em que \underline{D}_e é, usualmente, a matriz de rigidez elástica e linear correspondente a um material isotrópico.

A inequação (3.81), na qual intervém a *função de cedência* f , define todos os estados possíveis do material. No caso mais geral, a função f depende do tensor das tensões e do valor corrente das funções agrupadas no vector \underline{h} da expressão (3.83). A equação $f = 0$ define uma superfície no espaço n -dimensional das tensões, a *superfície de cedência*, que separa os estados de tensão admissíveis dos não admissíveis. Estados de tensão que conduzem a $f < 0$ são elásticos, os que correspondem a $f = 0$ são plásticos e os que levam a $f > 0$ são impossíveis. Com a evolução dos valores das funções contidas em \underline{h} , a superfície pode expandir, encolher, sofrer translações ou mesmo mudar de forma, o mesmo acontecendo ao domínio elástico.

Quando ocorre escoamento plástico, a evolução do tensor das deformações plásticas é dada pela expressão (3.84), onde $\dot{\lambda}$ é um escalar denominado de multiplicador plástico, e g é a função potencial plástico. Esta é uma função do tensor das tensões, e eventualmente também das variáveis internas, sendo responsável pela orientação da taxa de variação das extensões plásticas, devendo idealmente ser obtida a partir de resultados experimentais. O seu gradiente é dado por:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xy}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yz}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xz}} \right\}^T \quad (3.85)$$

As condições para a ocorrência de escoamento plástico podem ser sumariadas pelas condições de Kunh-Tucker

$$\begin{cases} f \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\lambda} f = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Com efeito, se o material está num estado elástico ($f < 0$), a terceira equação de (3.86) implica $\dot{\lambda} = 0$, o que de acordo com (3.84) conduz à não ocorrência de escoamento plástico. Por outro lado, num estado plástico tem-se $f = 0$, e, neste caso, a referida equação não impõe nenhuma

restrição ao escalar $\dot{\lambda}$. No entanto, este nunca deve ser negativo, dado que a extensão plástica é, por definição, não decrescente. Isto é descrito pela condição $\dot{\lambda} \geq 0$.

Diferenciando (3.80) e fazendo uso de (3.79), obtém-se

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}_e (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}_p) \quad (3.87)$$

A expressão (3.87) representa um sistema de 6 equações a 12 incógnitas. Considerando que a variação do tensor das extensões totais é obtida a partir da variação do campo de deslocamentos, são ainda necessárias mais 6 equações para determinar as componentes do vector com a taxa de variação das deformações plásticas. A direcção deste vector é dada por (3.84), pelo que para determinar a sua norma é necessária uma nova equação, a que permite calcular o valor da variação do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$. Para o efeito é utilizada a chamada *condição de consistência*, que expressa que durante o escoamento plástico ($\dot{\lambda} \geq 0$), para além do valor da função de cedência ser nulo, também a sua taxa de variação deve ser nula.

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad (3.88)$$

Supondo que todos os valores correntes das variáveis intervenientes, assim como a taxa de variação das deformações totais são dados, põe-se o problema de calcular a taxa de variação das restantes variáveis. Se o estado corrente pertence ao domínio elástico ($f < 0$), então o multiplicador plástico, a extensão plástica e as variáveis internas permanecem constantes, sendo a evolução do estado de tensão governada pela relação elástica. Se o estado de tensão corrente é plástico ($f = 0$), então ou ocorre escoamento plástico, ou o material entra em descarga elástica. A primeira situação é caracterizada por $\dot{f} = 0$ e $\dot{\lambda} \geq 0$, a segunda por $\dot{\lambda} = 0$ e por $\dot{f} < 0$. Uma situação particular, o carregamento neutro, pode ocorrer quando $\dot{\lambda} = 0$ e $\dot{f} = 0$. Nestas circunstâncias, a resposta é comandada pela relação elástica. Este último caso corresponde a uma limitação intrínseca aos modelos elasto-plásticos (Caner et al. 2002).

No caso de ocorrer escoamento plástico, a taxa de variação do multiplicador plástico é calculada aplicando a regra da derivação em cadeia à relação $\dot{f} = 0$:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{h}} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{k}} \cdot \dot{\underline{k}} = 0 \quad (3.89)$$

$\begin{matrix} (1 \times 6) & & (6 \times 1) & & (1 \times n) & & (n \times m) & & (m \times 1) \end{matrix}$

Substituindo (3.87) em (3.89), e atendendo a (3.82) e (3.84), chega-se à relação linear que permite obter a taxa de variação do multiplicador plástico,

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{D_e}{(6 \times 6)} \cdot \frac{\dot{\underline{\epsilon}}}{(6 \times 1)}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{D_e}{(6 \times 6)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} + H} \quad (3.90)$$

onde H é um escalar denominado de *módulo plástico*, que vem dado por:

$$H = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{h}}}{(1 \times n)} \cdot \frac{\frac{\partial h}{\partial \underline{k}}}{(n \times m)} \cdot \frac{q}{(m \times 1)} \quad (3.91)$$

A relação elasto-plástica entre a taxa de variação das tensões e a taxa de variação das extensões totais pode ser obtida tendo em atenção (3.84) e substituindo (3.90) em (3.87),

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}_{ep} \cdot \dot{\underline{\epsilon}} \quad (3.92)$$

com,

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D}_e \left(\frac{\underline{I}}{(6 \times 6)} - \frac{\frac{\frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}}}{(6 \times 1)} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}{(1 \times 6)} \cdot \frac{D_e}{(6 \times 6)}}{\frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}{(1 \times 6)} \cdot \frac{D_e}{(6 \times 6)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} + H} \right) \quad (3.93)$$

De acordo com o que foi exposto, a descarga ocorre sempre segundo uma lei elástica, não sendo por isso modelada a degradação de rigidez associada com os mecanismos internos de microfendilhação, nem a histerese associada aos ciclos carga e descarga. Conforme referido em **2.4.3**, esta degradação de rigidez pode ser acentuada quando são efectuadas descargas e recargas para além do limite correspondente ao fim da etapa 3 do processo de fractura em compressão. Em (Cachim 1999) refere-se uma metodologia baseada na utilização de uma superfície de cedência que controla a evolução das tensões e do escoamento plástico em situações de descarga, que se move cinematicamente no espaço das tensões, e que permite aproximar o comportamento observado em ensaios cíclicos de compressão e de tracção.

Na implementação computacional deste tipo de modelos, o problema básico consiste em proceder à integração da equação (3.87) de uma forma consistente. Num dado incremento de carga n (correspondente ao instante de tempo t) são conhecidas as extensões totais, as extensões plásticas, as variáveis internas e as tensões. No incremento de carga $n+1$ (correspondente ao instante $t + \Delta t$) em geral conhecem-se as extensões totais, sendo necessário actualizar as restantes variáveis. Esta integração pode ser executada com recurso a métodos explícitos ou

implícitos. Este métodos são do tipo *predictor-corrector*, assumindo-se que o incremento de tensão é elástico (*predictor* elástico), efectuando-se uma *correção* plástica de forma a garantir que o estado de tensão actualizado permanece na superfície de cedência actualizada. Nos métodos explícitos, esta correção é efectuada com base na superfície de cedência do incremento anterior, nos métodos implícitos a correção é efectuada com base na superfície de cedência actualizada. Os primeiros são estáveis se os incrementos de carga forem relativamente pequenos e a superfície de cedência suficientemente suave, enquanto que os segundos são incondicionalmente estáveis (Borst 1991). Ambos são correntemente utilizados, estando algoritmos do primeiro tipo descritos em (Cervenka et al. 2002; Owen e Hinton 1980; Póvoas 1991) e do segundo tipo em (Borst 1991; Cachim 1999; Feenstra 1993; Lourenço 1996).

A formulação atrás apresentada é abstracta e bastante geral. No caso da modelação do comportamento do betão, pode ser particularizada como se segue.

3.4.2 – Modelos isotrópicos com endurecimento isotrópico

A hipótese de isotropia inicial do betão é usualmente adoptada sem grande margem de erro, pelo que a função de cedência pode ser uma função dos invariantes do tensor das tensões. Isto dá origem aos modelos elasto-plásticos isotrópicos, de aplicação corrente na modelação do comportamento do betão. Noutros materiais, como por exemplo a alvenaria (Lourenço 1996), esta hipótese não é aplicável, pelo que são adoptados modelos elasto-plásticos anisotrópicos. Por outro lado, correntemente admite-se que a superfície de cedência apenas pode aumentar (ou diminuir) de tamanho (*Figura 3.25*), pelo que basta uma função de uma variável interna para descrever a sua evolução com o carregamento. A superfície de cedência toma então a forma,

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, c(k)) = 0 \Leftrightarrow F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - c(k) = 0 \quad (3.94)$$

onde em vez das tensões principais poderiam aparecer quaisquer outros invariantes do tensor das tensões. Em (Chen 1982; Jirasek 2002c) encontram-se as expressões das superfícies de cedência clássicas de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, até às mais sofisticadas propostas de Willam-Warnke e Ottosen, especificamente formuladas para o betão. Com a existência de endurecimento (ou amolecimento) isotrópico, o vector \underline{h} com as m funções das n variáveis internas, torna-se simplesmente numa função escalar c da variável interna k .

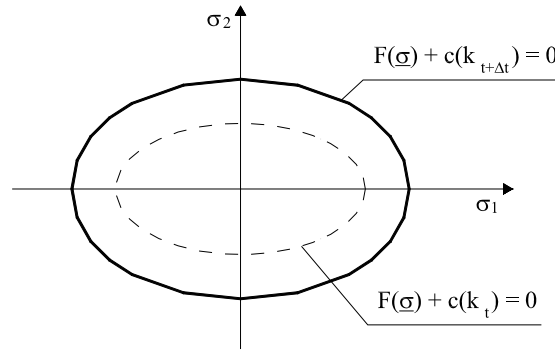


Figura 3.25 – Endurecimento isotrópico. Representação de uma superfície de cedência bidimensional.

Usualmente são consideradas duas formas diferentes para definir variáveis internas: *strain hardening* e *work hardening*. No caso de *strain hardening*, define-se a taxa de variação da variável interna por,

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \right\| \dot{\lambda} \quad (3.95)$$

conduzindo, de acordo com (3.82), à função escalar

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \right\| \quad (3.96)$$

No caso de *work hardening* a taxa de variação da variável interna vem dada por,

$$\dot{k} = \frac{1}{c(k)} \underline{\sigma}^T \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}_p = \frac{\dot{\lambda}}{c(k)} \underline{\sigma}^T \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.97)$$

e a função escalar q por:

$$q = \frac{1}{c(k)} \underline{\sigma}^T \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.98)$$

Em ambos os casos, em cada etapa do carregamento, a variável interna é determinada por integração:

$$k = \int \dot{k} dt \quad (3.99)$$

Na hipótese de *strain hardening*, a variável interna k tem o significado físico de uma extensão plástica acumulada, também designada de extensão plástica equivalente. Na hipótese de *work hardening*, tem o significado do trabalho de deformação plástica acumulado. Ambas as formulações são amplamente utilizadas, dando origem a resultados semelhantes. Em certos casos particulares de funções de cedência, as formulações são rigorosamente equivalentes. Em

ambos os casos, a função de endurecimento (ou amolecimento) $c(k)$ é usualmente calibrada de modo a reproduzir os resultados de um ensaio uniaxial.

3.4.3 – Endurecimento cinemático e misto

No caso de carregamentos cíclicos, regras de endurecimento mais complexas do que o endurecimento isotrópico podem ser necessárias. Uma alternativa comum é o endurecimento cinemático, usualmente empregue na modelação de materiais metálicos de modo a reproduzir o *efeito de Bauschinger* (Chen 1982; Jirasek 2002c). Neste tipo de endurecimento admite-se que a superfície de cedência sofre translações no espaço das tensões. No caso do betão é por vezes útil utilizar um modelo de endurecimento misto, prevendo simultaneamente endurecimento isotrópico e cinemático (Figura 3.26).

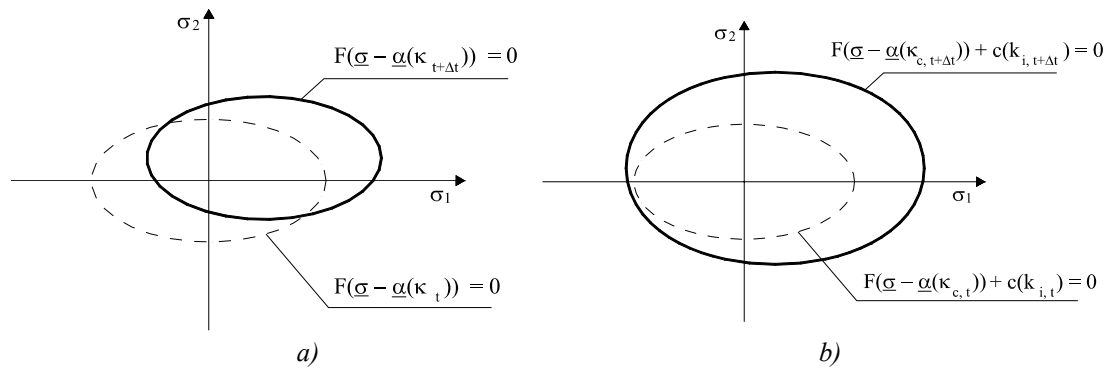


Figura 3.26 – Endurecimento cinemático (a) e endurecimento misto (b). Representação de uma superfície de cedência bidimensional.

Nestas circunstâncias a superfície de cedência toma a forma,

$$f(\underline{\sigma}, \underline{h}(\underline{k})) = 0 \Leftrightarrow F(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}(k_c)) - c(k_i) = 0 \quad (3.100)$$

onde o vector das funções das variáveis internas da expressão (3.83) se particulariza para,

$$\underline{h} = \{c \quad \underline{\alpha}\}^T \quad (3.101)$$

e o vector das variáveis internas por,

$$\underline{k} = \{k_i \quad k_c\}^T \quad (3.102)$$

Existem várias propostas para as leis de endurecimento cinemático, cuja exposição excede o âmbito da presente dissertação, e podem ser encontradas na bibliografia especializada (Chen 1982; Jirasek 2002c; Jirasek e Bazant 2002) ou na descrição de implementações específicas de modelos elasto-plásticos para o betão (Cachim 1999; Feenstra 1993).

3.4.4 – Leis de escoamento associadas e não associadas

Em 3.4.1 foi definida com toda a generalidade a lei de escoamento plástico, através da definição de uma função potencial plástico, dependente do tensor das tensões, ou no caso de plasticidade isotrópica, dos invariantes do tensor das tensões. Também foi referido que esta função, que define a direcção do escoamento plástico, deve ser obtida a partir de resultados experimentais. Um exemplo de uma investigação nesse sentido pode ser encontrada em (Maekawa e Okamura 1983).

No caso de um material elástico-perfeitamente plástico é, de um ponto de vista teórico, conveniente trabalhar com uma lei de escoamento que preserve a validade do princípio da máxima dissipação de energia plástica de deformação. Este princípio é verificado se a superfície de cedência for côncava e normal ao vector de escoamento plástico $\dot{\underline{\epsilon}}_p$ (Jirasek 2002c; Jirasek e Bazant 2002). Demonstra-se que, se um material respeitar este princípio, garante não só a unicidade da solução, mas também a irreversibilidade da deformação plástica. A conveniência teórica advém do facto de, nestas circunstâncias, ser possível formular o quadro teórico da análise plástica limite, que conduz a métodos de análise estrutural tão divulgados como o método das linhas de rotura e o método das bandas na análise de lajes, o método das escoras e tirantes, entre outros. O *postulado de Drucker* introduz, por sua vez, a noção de material estável, que permite estender as condições de unicidade da solução também aos materiais com endurecimento, requerendo não só a regra da normalidade e da convexidade da superfície de cedência, mas também o endurecimento (entendido aqui como o oposto de amolecimento, implicando, portanto, que a superfície de cedência apenas pode expandir, e nunca encolher) (Borst 1991; Chen 1982; Jirasek e Bazant 2002).

Nestas condições, a direcção do escoamento plástico é dada por,

$$\dot{\underline{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.103)$$

dizendo-se que se está perante uma *lei associada*, na medida em que se faz coincidir a função potencial plástico com a função de cedência. Com a adopção de uma lei de escoamento associada, a matriz da expressão (3.93) é simétrica, o que apresenta também vantagens de índole computacional.

No entanto, nem o princípio da máxima dissipação de energia de deformação plástica, nem o postulado de Drucker, são leis físicas com fundamento termodinâmico, mas apenas um conjunto de pressupostos que se revelou conveniente de um ponto de vista matemático e que, no caso dos metais, revelou também uma adequação ao comportamento observado experimentalmente.

No caso dos materiais friccionais, tais como o betão, a adopção de leis associadas não se revela adequada. Com efeito, mesmo a mais simples superfície de cedência, tem, no mínimo, de ser função do segundo invariante do tensor das tensões I_2 (ou, equivalentemente, do segundo invariante do tensor das tensões de desvio J_2) e do primeiro invariante do tensor das tensões I_1 , de forma a expressar o seu carácter friccional. Um corte pelo plano meridional de uma superfície típica está representado na Figura 3.27. A normalidade do vector escoamento plástico implica que a deformação plástica seja sempre acompanhada de um aumento de volume, fenómeno conhecido como *dilatância*. Ora, do que se expôs em 2.4.3, nomeadamente da análise da Figura 2.44, conclui-se isto só é verdade a partir de níveis da tensão octaédrica de corte elevados e próximos da rotura.

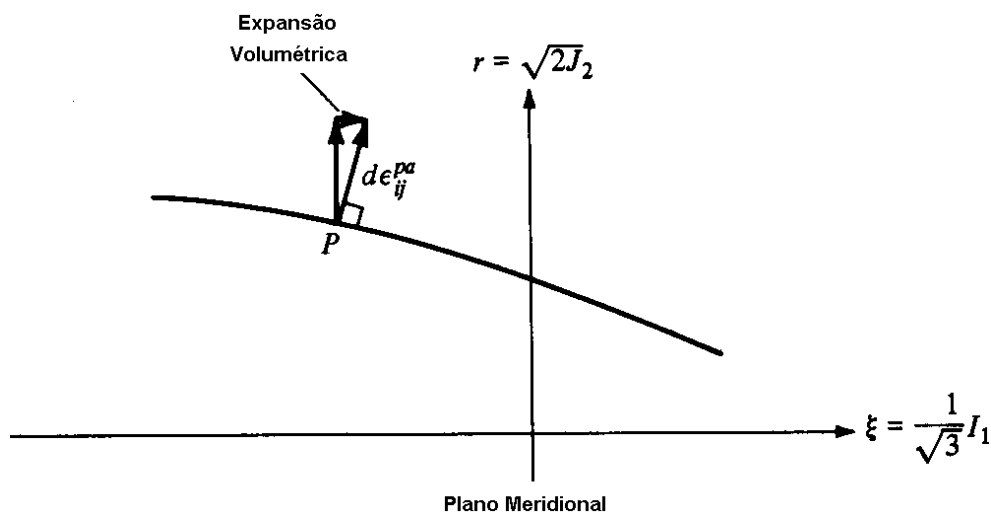


Figura 3.27 – Corte pelo plano meridional ($\sigma_1 = \sigma_2$) de uma superfície de cedência do betão (Chen 1982).

Desta forma, a adopção de *leis não associadas*, nas quais a função potencial plástico é independente da função de cedência, surge como uma consequência natural do comportamento deformacional observado, e da tentativa de reduzir a excessiva dilatância das leis associadas. As consequências do uso de leis não associadas do ponto de vista da unicidade das soluções e do comportamento deformacional está discutida em (Pramono e Willam 1989; Vermeer e Borst 1984). No entanto, refira-se que, nas análises bidimensionais em estado plano de tensão, onde normalmente os efeitos do confinamento não são tão marcados e a não linearidade estrutural é essencialmente marcada pela fissuração, o uso de leis associadas é corrente, tendo pouca influência no cômputo da resposta estrutural.

3.4.5 – Plasticidade com múltiplas superfícies de cedência

As superfícies de cedência usualmente adoptadas para o betão são abertas, na medida em que não intersectam o eixo hidrostático. No caso de um carregamento puramente hidrostático, o material responde de forma elástica, o que contradiz o comportamento deformacional

observado, exposto em 2.4.3. Este facto deriva do facto de as superfícies de cedência serem homólogas à superfície de rotura, que conforme referido em 2.4.2, é aberta. Desta forma, nos modelos mais sofisticados, adopta-se por vezes uma superfície de cedência que intersecta o eixo hidrostático, de forma a introduzir a não linearidade entre as tensões e extensões normais octaédricas. Por outro lado, a aplicação da elasto-plasticidade ao tratamento da fractura por tracção, torna muito difícil a descrição do comportamento do betão com recurso apenas a uma função de cedência e a uma função potencial plástico. Por último, muitas funções de cedência não são diferenciáveis em toda a sua extensão, contendo arestas (ou vértices, no caso bidimensional), colocando problemas ao cálculo do vector escoamento plástico. Nestas circunstâncias, é útil considerar a generalização da teoria apresentada em 3.4.1, considerando agora o domínio elástico confinado por N superfícies de cedência.

Nestas condições, a condição de cedência generalizada deve satisfazer simultaneamente as inequações:

$$f_i(\underline{\sigma}, \underline{h}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.104)$$

Cada função de cedência corresponde a um certo mecanismo de escoamento plástico, que gera um incremento da extensão plástica na direcção $\partial g_i / \partial \underline{\sigma}$. A lei de escoamento plástico é então generalizada para,

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p = \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_i}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.105)$$

e a taxa de variação das variáveis internas para,

$$\underline{\dot{k}} = \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i \underline{q}_i(\underline{\sigma}, \underline{k}_i) \quad (3.106)$$

onde os $\dot{\lambda}_i$ são as taxas de variação dos multiplicadores plásticos associados aos respectivos mecanismos de escoamento. Cada mecanismo é apenas activado se a condição (3.104) respectiva é satisfeita com uma igualdade. Isto conduz às condições de Kuhn-Tucker,

$$\begin{cases} f_i \leq 0 \\ \dot{\lambda}_i \geq 0 \\ \dot{\lambda}_i f_i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.107)$$

que devem ser satisfeitas para cada índice i . De igual forma temos as condições de consistência,

$$\dot{\lambda}_i \dot{f}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.108)$$

Em geral, apenas um subconjunto de todos os possíveis mecanismos de escoamento são activados. Definindo o subconjunto de mecanismos activos por,

$$A = \{i \mid \dot{\lambda}_i > 0\} \quad (3.109)$$

e tendo em atenção (3.105), é possível escrever:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D}_e \left(\dot{\underline{\varepsilon}} - \sum_{j \in A} \dot{\lambda}_j \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial \underline{\sigma}} \right) \quad (3.110)$$

As taxas de variação dos multiplicadores plásticos $\dot{\lambda}_i$ não nulas, são calculadas a partir da satisfação simultânea das correspondentes condições de consistência $\dot{f}_i = 0, i \in A$, conduzindo ao sistema de equações lineares,

$$\sum_{j \in A} a_{ij} \dot{\lambda}_j = b_i, \quad i \in A \quad (3.111)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}^T \cdot \underline{D}_e \cdot \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial \underline{\sigma}} + H_{ij} \\ b_i &= \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\sigma}}^T \cdot \underline{D}_e \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} \\ H_{ij} &= - \frac{\partial f_i}{\partial \underline{h}} \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{k}} \underline{q}_j \end{aligned} \quad (3.112)$$

A solução de (3.111) só é admissível se todos os $\dot{\lambda}_i, i \in A$ forem não negativos. Se não for este o caso, o subconjunto A é diferente do assumido, que, note-se, não é conhecido à priori, apenas se sabendo que deve ser um subconjunto dos mecanismos potencialmente activos tais que:

$$P = \{i \mid \dot{f}_i > 0\} \quad (3.113)$$

Alguns dos mecanismos de P podem ser desactivados pela descarga da correspondente superfície de cedência ($f_i = 0$, mas $\dot{f}_i < 0$), e a escolha do subconjunto A não é óbvia. O procedimento usual consiste em começar com $A=P$. Se a solução não for admissível, excluem-se os mecanismos para os quais a taxa de variação do multiplicador plástico é negativa. O sistema (3.111) é reajustado e uma nova solução obtida, sendo repetido o processo até a solução ser admissível ($\dot{\lambda}_i \geq 0$ para $i \in A$ e $\dot{f}_j \leq 0$ para $j \in (P - A)$).

Apesar da sua aparente complexidade, modelos com múltiplas superfícies de cedência têm sido utilizados com sucesso em várias aplicações práticas. Um exemplo de um modelo constitutivo especificamente desenvolvido para o betão, baseado nos conceitos até aqui expostos, foi desenvolvido por (Feenstra 1993). Trata-se de um modelo elasto-plástico em tracção e em compressão, usando o critério de Rankine para as roturas por tracção e, por exemplo, o critério de Drucker-Prager para as roturas por compressão. A sua representação bidimensional está ilustrada na *Figura 3.28*.

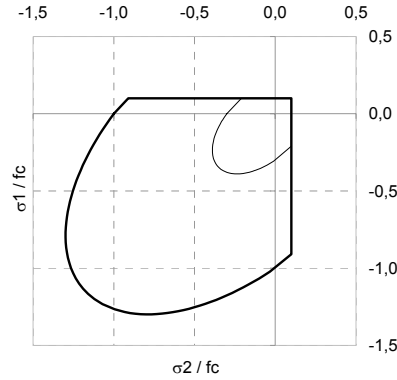


Figura 3.28 – Modelo elasto-plástico em tracção e compressão. Representação das superfícies de cedência para o caso bidimensional (estado plano de tensão).

A superfície de Rankine experimenta amolecimento isotrópico, enquanto que a superfície de Drucker-Prager experimenta endurecimento e, eventualmente, amolecimento uma vez atingida a superfície de rotura. As funções de cedência podem ser formuladas, respectivamente, por,

$$\begin{aligned} f_1(\underline{\sigma}, \underline{h}) &= \sigma_1(\underline{\sigma}) - h_1(k_1) \\ f_2(\underline{\sigma}, \underline{h}) &= \sqrt{J_2(\underline{\sigma})} + \alpha I_1(\underline{\sigma}) - \beta h_2(k_2) \end{aligned} \quad (3.114)$$

onde $\sigma_1(\underline{\sigma})$ é a máxima tensão principal do tensor das tensões, J_2 é o segundo invariante do tensor das tensões de desvio, I_1 é o primeiro invariante do tensor das tensões, α é um escalar relacionado com o ângulo de atrito interno do material e β é uma constante escalar, determinada de forma a conferir a h_2 o significado físico de uma tensão uniaxial de compressão. O vector \underline{h} contém todas as funções das variáveis internas,

$$\underline{h}(\underline{k}) = [h_1(k_1) \quad h_2(k_2)]^T \quad (3.115)$$

e o vector \underline{k} contém as variáveis internas:

$$\underline{k} = [k_1 \quad k_2]^T \quad (3.116)$$

A lei de escoamento para o mecanismo de tracção é associada, enquanto que para o mecanismo de compressão pode ser definida, caso seja conveniente, uma lei não associada.

O modelo trabalha assim com duas variáveis internas, k_1 e k_2 , que controlam a evolução da tensão de cedência actual em tracção e em compressão, respectivamente. A sua taxa de variação é definida pela expressão (3.106), que neste caso pode tomar a forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \end{Bmatrix} = \dot{\lambda}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \zeta_{21} \end{Bmatrix} + \dot{\lambda}_2 \begin{Bmatrix} \zeta_{12} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.117)$$

O acoplamento entre os dois mecanismos de endurecimento/amolecimento, em correspondência com cada uma das superfícies, é passível de ser considerado através dos parâmetros ζ_{12} e ζ_{21} . Devido à falta de dados experimentais, considera-se $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 0$, e o acoplamento é desprezado. Isto significa que as duas superfícies evoluem independentemente.

Este modelo está especialmente vocacionado para aplicação a estruturas sujeitas a carregamentos proporcionais e monotónicos, e em que o grau de anisotropia da armadura, definido como o quociente entre a força que pode ser desenvolvida na cedência das armaduras dispostas em cada uma das direcções, seja reduzido (inferior a 5, segundo (Feenstra 1993)). As primeiras duas condicionantes prendem-se com o facto de as descargas serem efectuadas de forma elástica, o que no caso do betão traccionado pode originar aberturas de fenda residuais exageradas. Por outro lado, foi demonstrada a similaridade entre o modelo elasto-plástico de Rankine e os modelos de fendas rotativas no que diz respeito ao seu desempenho no cômputo da resposta do betão traccionado. Desta forma, aplicam-se a este modelo todas as considerações tecidas em 3.2.3.2 acerca dos modelos de fendas rotativas.

As principais vantagens deste modelo residem na robustez do algoritmo em todas as situações de carregamento, permitindo identificar facilmente situações de rotura.

3.4.6 – Modelos elasto-plásticos generalizados

Os modelos elasto-plásticos são hoje correntemente utilizados, não só na modelação do comportamento do betão, mas também de outros materiais como os metais, a alvenaria e o solo, só para citar alguns exemplos. Apesar de, no caso do betão, este tipo de modelos não conseguir reproduzir alguns aspectos do comportamento macroscópico evidenciado, alguns dos quais foram sendo atrás referidos, existem fundamentalmente duas ordens de razão para continuarem ainda hoje a ser massivamente utilizados. Em primeiro lugar, existe já uma grande experiência na utilização deste tipo de formulações, estando simultaneamente o seu enquadramento teórico firmemente consolidado, o que é uma virtude que os novos modelos, porventura mais evoluídos, ainda não possuem. Em segundo lugar, o papel dos modelos para o betão comprimido no cômputo da não linearidade da resposta de muitas estruturas é geralmente mais discreto do que o papel desempenhado pelos modelos do betão traccionado, pelo que eventuais refinamentos à teoria clássica podem não incrementar de forma sensível o realismo das previsões numéricas.

Ainda assim têm vindo a ser propostas generalizações da teoria clássica da plasticidade no sentido de aumentar as suas capacidades na reprodução do comportamento macroscópico do betão. Merece referência o modelo de (Han e Chen 1987) com endurecimento não uniforme (“*non uniform plasticity*”), no qual, durante o processo de endurecimento, a superfície de cedência vai mudando de forma até se aproximar da superfície de rotura, permitindo reproduzir todo o comportamento deformacional do betão traccionado e comprimido, mesmo sob confinamento elevado. Temos ainda os modelos de plasticidade confinada (“*bounding surface plasticity*”), originalmente propostos por Dafalias e Popov (CEB 1996; Vermeer e Borst 1984), nos quais o escoamento plástico é comandado pela distância do estado de tensão corrente a uma superfície de confinamento exterior à superfície de cedência. Conforme demonstrado em (Vermeer e Borst 1984) este tipo de modelos está especialmente vocacionado para reproduzir o comportamento histerético verificado em carregamento cíclicos de materiais friccionais, tais como o betão. Referências bibliográficas atestando o sucesso deste tipo de modelos na reprodução do comportamento do betão podem ser encontradas em (CEB 1996).

3.5 – MODELOS DE DANO

A mecânica do dano contínuo é uma teoria constitutiva que descreve a perda progressiva de integridade do material devida à propagação e coalescência de microfendas, vazios microscópicos ou outros defeitos similares. Estas mudanças da microestrutura do material levam à degradação da rigidez observada à escala macroscópica. Um modelo reológico ilustrativo está representado na *Figura 3.29*. A rigidez inicial do material pode ser considerada como uma associação em paralelo de molas elásticas que se vão rompendo, caracterizando assim a perda de rigidez.

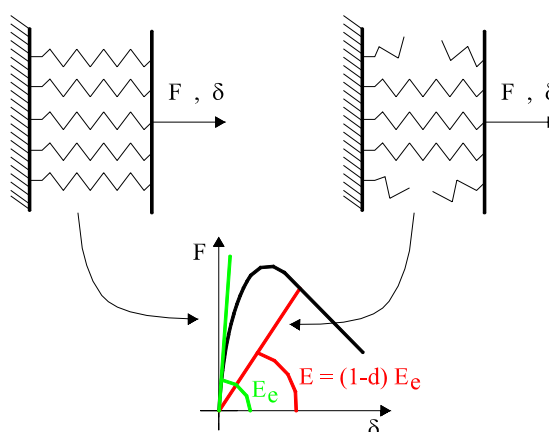


Figura 3.29 – Modelo reológico de um modelo de dano.

A versão mais simples de um modelo de dano isotrópico representa a matriz de rigidez do material danificado como uma fracção da rigidez elástica inicial. Neste caso, o dano é caracterizado apenas pela variável escalar, d :

$$\underline{\sigma} = (1 - d)\underline{D}_e \underline{\varepsilon}_e \quad (3.118)$$

No material intacto a variável de dano toma o valor nulo, $d = 0$, tendendo monotonicamente para a unidade com a progressão da danificação. Por requisitos termodinâmicos, a variável de dano é não negativa e não decrescente. Um modelo assim definido baseia-se no pressuposto simplificado de que a degradação da rigidez é isotrópica, o que corresponde a assumir que as fendas ou os defeitos se encontram uniformemente distribuídos em todas as direcções. No entanto, a fractura do betão é um fenómeno altamente direccionado, induzindo um comportamento anisotrópico, pelo que um modelo com estas características será sempre algo simplista na abordagem ao comportamento do betão fissurado.

Intrinsecamente relacionado com o conceito de variável de dano está o conceito de *tensão efectiva*. Em termos tensoriais, o tensor das tensões efectivas $\underline{\bar{\sigma}}$ é definido por:

$$\underline{\bar{\sigma}} = \frac{1}{1-d} \underline{\sigma} \quad (3.119)$$

As relações constitutivas do material intacto são estabelecidas em termos do tensor das tensões efectivas $\underline{\bar{\sigma}}$, obtendo-se as tensões totais $\underline{\sigma}$ a partir daquelas e do conhecimento da evolução da variável de dano.

Um modelo de dano elástico é então composto pelas seguintes componentes:

1. Relação constitutiva entre as tensões efectivas e as extensões elásticas:

$$\underline{\bar{\sigma}} = \underline{D}_e \underline{\varepsilon}_e \quad (3.120)$$

2. Critério de dano, que permite estabelecer as situações de carga, descarga e recarga, e cuja satisfação implica a evolução da variável de dano. Este critério pode ser estabelecido no espaço das tensões efectivas ou no espaço das deformações totais.
3. Lei de evolução da variável de dano.

Exemplos de formulações com modelos de dano deste tipo podem ser encontrados em (Hanganu et al. 2002; Jirasek 2002c), estando especialmente vocacionadas para a análise de estruturas de grandes dimensões, devido à sua simplicidade e robustez dos algoritmos computacionais resultantes.

Dada a diferença fundamental entre o comportamento do betão comprimido e traccionado, os modelos de dano com aplicação à modelação do betão podem ser formulados com duas variáveis de dano independentes, d^+ e d^- , controlando o processo de degradação em tracção e em compressão, respectivamente (Faria 1994).

Existe hoje uma variedade de modelos de dano, cuja complexidade da formulação pode ser grande, nomeadamente no caso dos modelos de dano anisotrópico. Neste tipo de modelos, a variável de dano deixa de ser um escalar, passando a ser um tensor, e portanto uma quantidade associada a uma direcção. Referências bibliográficas sobre este tipo de modelos podem ser encontradas em (Hanganu et al. 2002; Jirasek 2002c).

Por outro lado, a lei constitutiva (3.120) pode ser generalizada no sentido de incluir deformações permanentes, resultando assim um modelo de dano com plasticidade acoplada,

$$\underline{\bar{\sigma}} = \underline{D}_e (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_p) \quad (3.121)$$

sendo, nestas circunstâncias, o tensor das tensões totais dado por:

$$\underline{\sigma} = (1 - d) \underline{D}_e (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_p) \quad (3.122)$$

A formulação de um modelo deste tipo está exposta em (Faria 1994). O modelo reológico de um modelo de dano com deformações permanentes pode ser obtido à custa da associação em paralelo do modelo reológico associado aos modelos elasto-plásticos (*Figura 3.30*).

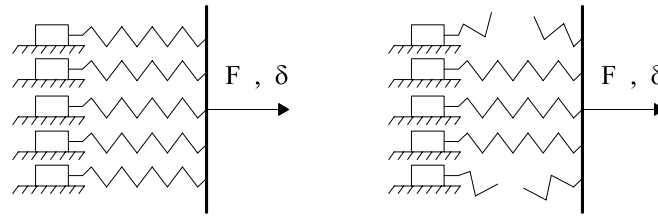


Figura 3.30 – Modelo reológico de um modelo de dano com plasticidade.

3.6 – MODELOS DE MICROPLANOS

Os modelos baseados no conceito do microplano representam uma abordagem alternativa aos modelos constitutivos de carácter tensorial até aqui expressos. Ao contrário destes, que relacionam as componentes do tensor das tensões directamente com as componentes do tensor das deformações, os modelos de microplanos trabalham com vectores de tensões e de extensões associados a um conjunto de planos de várias orientações: os chamados *microplanos*. Os microplanos estão de alguma forma relacionados com a microestrutura do material e, no caso do betão, podem representar as orientações da interface cimentícia entre os agregados, onde se concentra a microfendilhação (*Figura 3.31 a*). Estes planos são definidos pelos seus versores normais e, em cada um deles, existem componentes normais e tangenciais das tensões e das extensões (*Figura 3.31 b*).

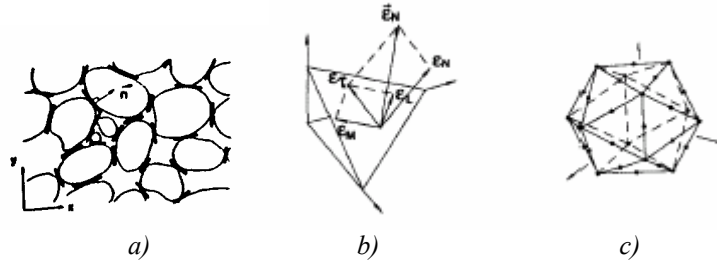


Figura 3.31 – a) Componentes das extensões num microplano; b) Microplanos necessários à integração numérica da expressão (3.124).

As leis constitutivas básicas são definidas localmente ao nível do microplano, sendo posteriormente transformadas para o nível do ponto material usando determinadas relações entre as grandezas tensoriais e vectoriais. A escolha mais natural seria construir o vector das tensões e das extensões em cada microplano a partir das projecções dos respectivos tensores. Contudo é impossível efectuar este procedimento para as tensões e para as extensões e, simultaneamente, satisfazer uma relação geral entre as correspondentes componentes vectoriais. Desta forma, a maioria dos modelos aplicáveis ao betão, baseia-se chamada *restrição cinemática*, que define o vector das extensões e_i , no plano definido pela normal n_i , por:

$$e_i = \varepsilon_{ij} n_j \quad (3.123)$$

Na expressão acima, ε_{ij} representa o tensor das extensões. Note-se que, por simplicidade, foi usada a notação indicial, pelo que a repetição de índices implica um somatório.

O tensor das tensões é obtido a partir dos vectores das tensões actuantes nos microplanos através do princípio dos trabalhos virtuais, integrando o trabalho sobre todas as possíveis orientações dos microplanos, ou seja, sobre a superfície de uma esfera, obtendo-se:

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} s_{ij} \delta e_i d\Omega \quad (3.124)$$

onde $\delta \varepsilon_{ij}$ são as componentes do tensor arbitrário, mas simétrico, das extensões virtuais e

$$\delta e_i = \delta \varepsilon_{ij} n_j \quad (3.125)$$

são as correspondentes componentes do vector das extensões virtuais no microplano. A integração numérica da expressão (3.124) requer a consideração de um número finito de microplanos (Figura 3.31 c)).

A particularização destas expressões, assim como a definição de leis constitutivas ao nível dos microplanos podem ser encontradas em (Bazant et al. 2000b; Bazant e Gambarova 1984; Bazant et al. 1996a; Bazant et al. 1996b; Caner e Bazant 2000; Caner et al. 2002; CEB 1996; Hoehler e Ozbolt 2002). Este tipo de modelos tem revelado uma enorme versatilidade, sendo capaz de

reproduzir o comportamento de elementos estruturais de betão sujeitos às mais diversas formas de carregamento, desde as cargas cíclicas até aos carregamentos altamente não proporcionais (Bazant et al. 2000a), sendo apontado como a abordagem mais promissora à modelação do comportamento do betão. O preço a pagar por estas potencialidades reflecte-se na grande capacidade computacional requerida, cerca de 10 vezes superior à dos clássicos modelos elástico-plásticos (Bazant et al. 2000b). O seu uso na análise de estruturas de engenharia civil está, por isso, ainda algo confinado ao domínio da investigação.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE BETÃO COM BASE NO SOFTWARE DIANA

4 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE BETÃO COM BASE NO SOFTWARE DIANA

4.1 – INTRODUÇÃO

No presente capítulo são expostas algumas aplicações de modelos de análise não linear ao estudo do comportamento de estruturas de betão das quais se dispõem de resultados experimentais credíveis, com os quais se comparam e discutem os resultados numéricos obtidos. Os modelos utilizados estão implementados no software DIANA 8.1, comercializado e desenvolvido pela TNO DIANA, B.V. Este é um programa generalista, com vasto âmbito de aplicabilidade no domínio da engenharia civil, contemplando modelos para a análise não linear estática e dinâmica de estruturas constituídas por diversos tipos de materiais, tais como solos, rocha, betão, aço, borracha e alvenaria, mas também para análises de percolação, de consolidação e de evolução do grau de hidratação e das propriedades mecânicas dos betões jovens, entre outras (Witte e Kikstra 2002b).

No que se refere aos modelos disponíveis para análise mecânica de estruturas de betão, estão disponíveis três formulações conceptualmente diferentes, que se descrevem sumariamente com base no que foi exposto no Capítulo 3, sendo também indicada a formulação seleccionada para a aplicação efectuada no Capítulo 5. São ainda definidos os diagramas e os valores adoptados para os parâmetros que definem as leis constitutivas. As designações dos diferentes modelos são as constantes do manual do utilizador (Witte e Kikstra 2002b).

4.1.1 – Modelo “*Multifix*”

O modelo aqui designado por “Multifix” é um modelo de fendilhação distribuída com decomposição das extensões, com possibilidade de formação de múltiplas fendas fixas, tal como exposto em 3.3. O critério de formação de fendas consiste na satisfação simultânea das condições de violação do critério da tensão máxima e do ângulo limite mínimo entre duas fendas (“*threshold angle*”), α . Dos critérios referidos em 3.3.2 este é o mais restritivo, e portanto, o mais estável do ponto de vista numérico. Por defeito, e nada sendo dito em contrário, assume-se um valor de $\alpha = 60^\circ$. O critério da tensão máxima utilizado foi o representado na *Figura 3.6 b)* para o caso bidimensional.

Em tracção, e antes da formação de uma fenda, é assumido um comportamento elástico e linear para o betão. No caso de fractura localizada, durante a fase de processamento da fractura,

considerou-se, por defeito, um diagrama de amolecimento linear, conforme representado na *Figura 4.1 a)*. Este é um diagrama grosseiro, no entanto, é o mais eficiente do ponto de vista computacional, na medida em que elimina a necessidade de iterações internas na lei constitutiva. A descarga é efectuada de forma secante para a origem. A largura efectiva da banda de fendilhação foi, simplifcadamente, tomada igual à raiz quadrada da área do elemento finito nos casos bidimensionais,

$$h = \sqrt{A_{elem}} \quad (4.1)$$

ou raiz cúbica do volume do elemento, nos casos tridimensionais,

$$h = \sqrt[3]{V_{elem}} \quad (4.2)$$

Tomou-se esta opção na medida em que, na corrente implementação do modelo, este é um parâmetro de entrada manual. Não sendo, em geral, conhecida à priori a direcção da fendilhação é impossível, ou muito trabalhoso, quantificar h de acordo com propostas mais elaboradas.

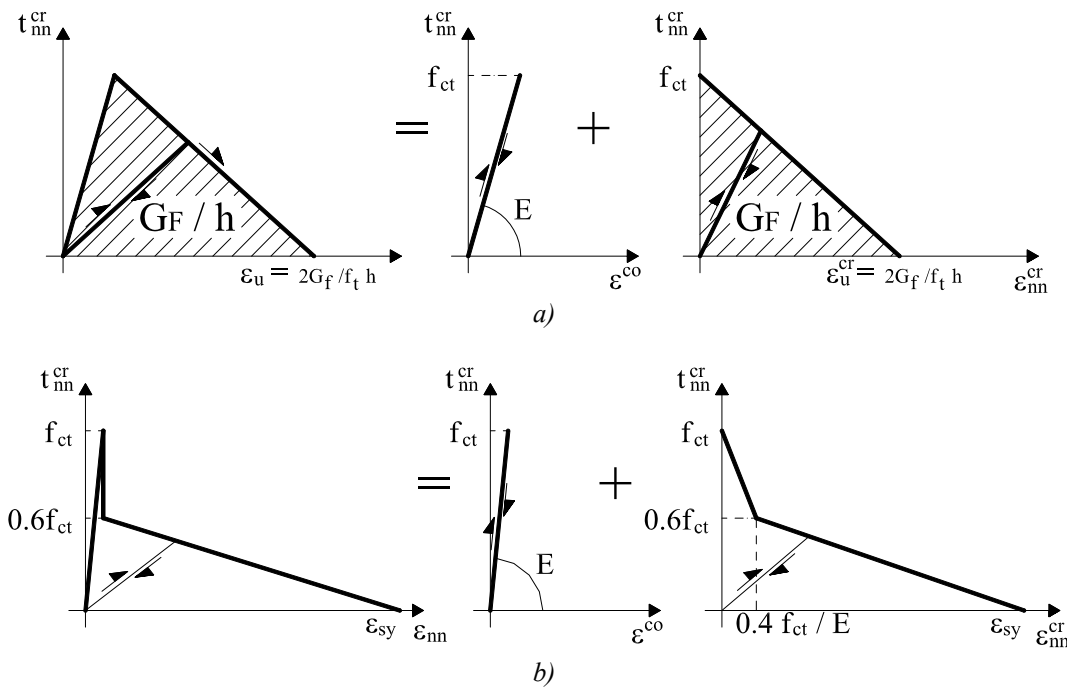


Figura 4.1 – a) Diagrama de amolecimento linear. b) Diagrama de retenção de tensões de tracção no betão.

No caso de fissuração não localizada devido à presença de armadura aderente, adoptou-se o diagrama de retenção de tensões representado na *Figura 4.1 b)*. Mais uma vez se optou por um diagrama simples, em detrimento de propostas mais elaboradas que conduzissem a leis não lineares que implicassem a existência de ciclos internos na lei constitutiva da expressão 3.44, ou de modelos mais complexos que fossem função da distância média entre fendas, da percentagem de armadura, etc. A extensão última do diagrama foi feita coincidir com a extensão

de cedência das armaduras. Na realidade, a extensão última do diagrama deverá ser função do ângulo entre a direcção das armaduras e a normal ao plano da fenda. O procedimento adoptado é, no entanto, conservativo, podendo reflectir-se numa avaliação por defeito da rigidez da resposta estrutural, em casos em que este ângulo seja muito diferente de 90°. Nestes casos, e se necessário, poderá ser feita uma avaliação mais rigorosa (Figueiras 1983).

A corrente implementação do modelo não tem em conta a anisotropia do diagrama de “*tension stiffening/softening*”, conforme ilustrada na *Figura 3.12*. Uma vez definido o diagrama de comportamento, ele é aplicado a todas as fendas que se formem no ponto de integração, independentemente da sua orientação.

Para o coeficiente de redução de rigidez de corte β , a única opção disponível é a adopção de um valor constante (“*constant shear retention*”), tendo-se considerado $\beta = 0.1$.

Em compressão adoptou-se um modelo elasto-plástico, formulando a matriz constitutiva \underline{D}_{co} da expressão (3.44), na forma da matriz \underline{D}_{ep} da expressão (3.93),

$$\underline{D}_{co} = \underline{D}_{ep} \quad (4.3)$$

A decomposição das extensões toma a forma,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p + \underline{\varepsilon}_{cr} \quad (4.4)$$

sendo a extensão total $\underline{\varepsilon}$ decomposta numa parcela referente ao betão, composta pela parte elástica $\underline{\varepsilon}_e$ e pela parte plástica $\underline{\varepsilon}_p$, e numa parcela referente às fissuras $\underline{\varepsilon}_{cr}$.

Foram usadas diferentes superfícies de cedência, conforme se tratassem de análises bi- ou tridimensionais. No caso de problemas bidimensionais adoptou-se o critério de Drucker-Prager, segundo uma lei associada, com endurecimento isotrópico,

$$f(\underline{\sigma}, c(k)) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{P} \underline{\sigma}} + \alpha_f \underline{\pi}^T \underline{\sigma} - \beta_c c(k) \quad (4.5)$$

onde \underline{P} é a matriz de projecção,

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

π é o vector projecção,

$$\underline{\pi} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (4.7)$$

$\underline{\sigma}$ é o vector das tensões, as constantes α_f e β_c , são dadas por,

$$\alpha_f = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \beta_c = \frac{6 \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad (4.8)$$

ϕ é o ângulo de atrito do material e c é a coesão função da variável interna k . Os dois parâmetros independentes do critério, o ângulo de atrito ϕ e a coesão c , foram calibrados de forma a garantir que, no espaço das tensões principais, a superfície de rotura passa:

- no ponto $(0; 0; -f_c)$, de modo a garantir a modelação de um ensaio uniaxial;
- no ponto $(0; -af_c; -af_c)$, com $a = 1.16$, que corresponde à rotura em compressão biaxial.

Particularizando a expressão (4.5) para a primeira condição obtém-se,

$$c = f_c \frac{1 - \alpha_f}{\beta_c} = f_c \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} \quad (4.9)$$

Procedendo igualmente para a segunda condição obtém-se,

$$c = a f_c \frac{1 - 2\alpha_f}{\beta_c} = a f_c \frac{3 - 5 \sin \phi}{6 \cos \phi} \quad (4.10)$$

Resolvendo o sistema de equações (4.9) e (4.10), obtém-se finalmente,

$$\phi \approx 10^\circ \quad \text{e} \quad c = 0.42 f_c \quad (4.11)$$

O ajuste conseguido está ilustrado na *Figura 4.2 a)*, contra os resultados experimentais de Kupfer e Gerstle.

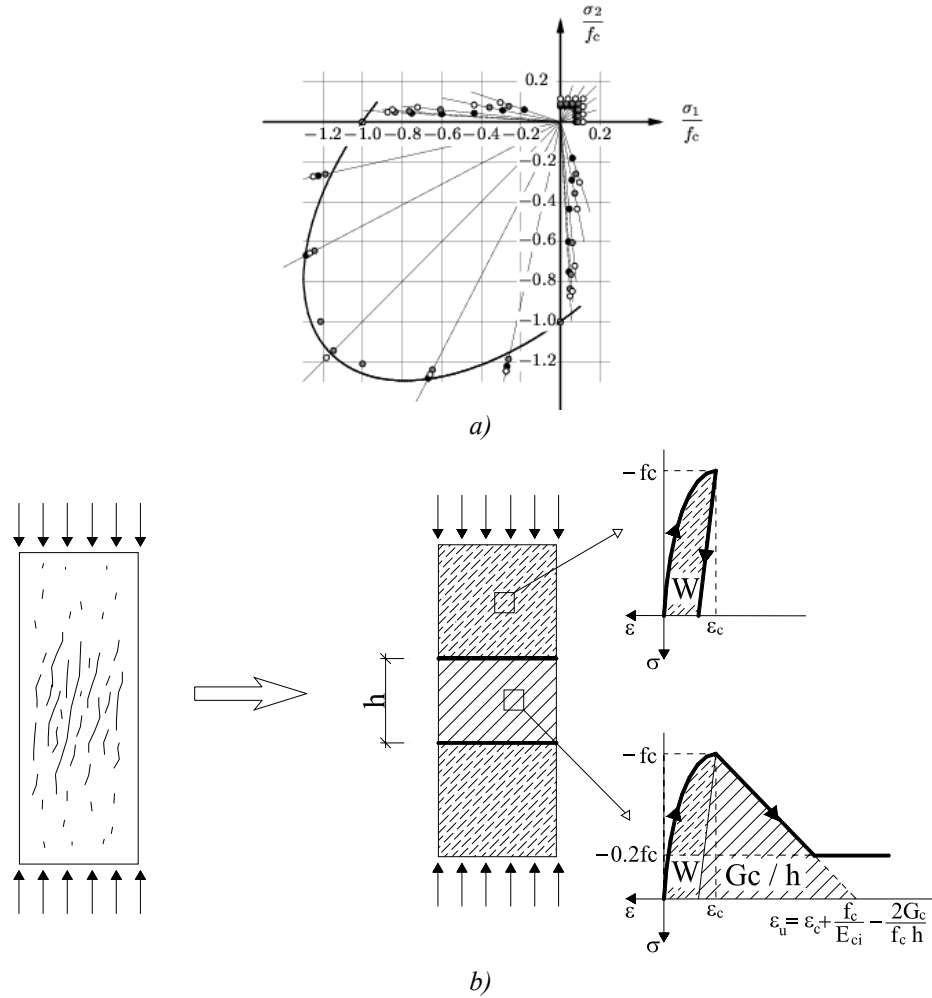


Figura 4.2 – a) Ajuste da envolvente de rotura biaxial aos resultados experimentais de Kupfer e Gerstle. b) Curva uniaxial em compressão. W é energia de deformação plástica dissipada ao longo de todo o provete, G_c é a energia dissipada na zona de processamento da fractura.

O diagrama de endurecimento $c(k)$ foi definido de modo a ajustar a curva uniaxial proposta em (fib 1999a),

$$\sigma(\varepsilon) = -f_c \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2)x}, \quad k = \frac{E_{ci}}{E_{c,sec}}, \quad x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad (\text{MPa, m/m}) \quad (4.12)$$

em que E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente na origem, dado por,

$$E_{ci} = 9980 \alpha_E f_c^{1/3} \quad (\text{MPa}) \quad (4.13)$$

O escalar α_E é função do tipo de agregado (fib 1999a), valendo 1 para agregados quartezticos. $E_{c,sec} = f_c / \varepsilon_c$ é o módulo de elasticidade secante da origem até ao valor de pico do diagrama. A extensão de pico ε_c é expressa por,

$$\varepsilon_c = -0.0017 - 0.0010 \frac{f_c}{70} \quad (\text{m/m, MPa}) \quad (4.14)$$

Após a tensão de pico, f_c , foi definido um ramo de amolecimento. A existência de amolecimento implica localização de deformações, pelo que a objectividade dos cálculos em relação ao tamanho dos elementos finitos só é garantida adoptando um critério energético. Desta forma, e de acordo com o exposto em 2.4.3, adoptou-se um ramo de amolecimento linear definido de forma a garantir a dissipação da energia de fractura em compressão numa banda localizada, de largura h (Figura 4.2 b)). Após amolecimento até 20% de f_c , adoptou-se um patamar horizontal.

Adoptou-se a hipótese de “*strain hardening*”, definindo a taxa de variação da variável interna $\dot{\kappa}$ de acordo com (3.95). Com a lei de escoamento associada, é possível demonstrar que a referida expressão é equivalente a,

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \sqrt{1 + 2\alpha_f^2} \quad (4.15)$$

Particularizando a lei de escoamento (3.95) para o caso uniaxial, chega-se à conclusão que a extensão plástica principal mínima vem dada por,

$$\dot{\varepsilon}_{p3} = -\dot{\lambda}(1 - \alpha_f) \quad (4.16)$$

Eliminando o multiplicador plástico das equações (4.15) e (4.16), chega-se à relação entre a variável interna e a extensão plástica num ensaio uniaxial,

$$\dot{\kappa} = -\frac{\sqrt{1 + 2\alpha_f^2}}{1 - \alpha_f} \dot{\varepsilon}_{p3} \approx -1.157 \dot{\varepsilon}_{p3} \quad (4.17)$$

No caso de problemas tridimensionais, optou-se pelo critério de Mohr-Coulomb, seguindo uma lei não associada com endurecimento isotrópico. No espaço das tensões principais $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$, a função de cedência é expressa por,

$$f(\underline{\sigma}, c(k)) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi - c(k)\cos\phi \quad (4.18)$$

e a função potencial plástico por,

$$g(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\psi \quad (4.19)$$

em que ψ é o ângulo de dilatação e as restantes variáveis têm o significado usual.

De forma a garantir a reprodução do estado de rotura uniaxial com $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, -f_c)$, verifica-se, por substituição em (4.18), que se tem,

$$c = \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} f_c \quad (4.20)$$

O diagrama de endurecimento $c(k)$ foi definido de modo a ajustar a mesma curva uniaxial atrás definida. Deixando cair a condição $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$, tanto a superfície de cedência como o potencial plástico, passam a ser definidos por seis planos cada, obtidos por permutação cíclica dos índices. As intersecções destes planos definem arestas. No caso uniaxial $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, \sigma_3)$ o escoamento plástico ocorre segundo uma aresta. Nestas condições, está-se perante um caso particular de (3.110), dado que das duas superfícies activas, as condições de simetria impõem $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}$. Desta forma, a taxa de variação do vector extensão plástica vem expressa por,

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{p1} \\ \dot{\epsilon}_{p2} \\ \dot{\epsilon}_{p3} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} 1/4(1 + \sin \psi) \\ 1/4(1 + \sin \psi) \\ -1/2(1 - \sin \psi) \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Considerando igualmente a hipótese de “strain hardening”, a taxa de variação da variável interna vem expressa por,

$$\dot{k} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{1}{12}(1 + \sin \psi)^2 + \frac{1}{6}(1 - \sin \psi)^2} \quad (4.22)$$

Tendo em atenção o valor de $\dot{\epsilon}_{p3}$ dado por (4.21), e o valor de \dot{k} dado por (4.22) é possível obter a relação entre a taxa de variação da variável interna e a extensão plástica num ensaio uniaxial,

$$\dot{k} = -\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \psi - 2/3 \sin \psi}}{1 - \sin \psi} \dot{\epsilon}_{p3} \quad (4.23)$$

O ângulo de atrito foi escolhido de forma a ajustar a envolvente de rotura experimental dentro dos níveis de confinamento espectáveis na maioria das análises. Considerando $\phi = 35^\circ$ consegue-se um ajuste muito satisfatório, conforme se atesta na *Figura 4.3*.

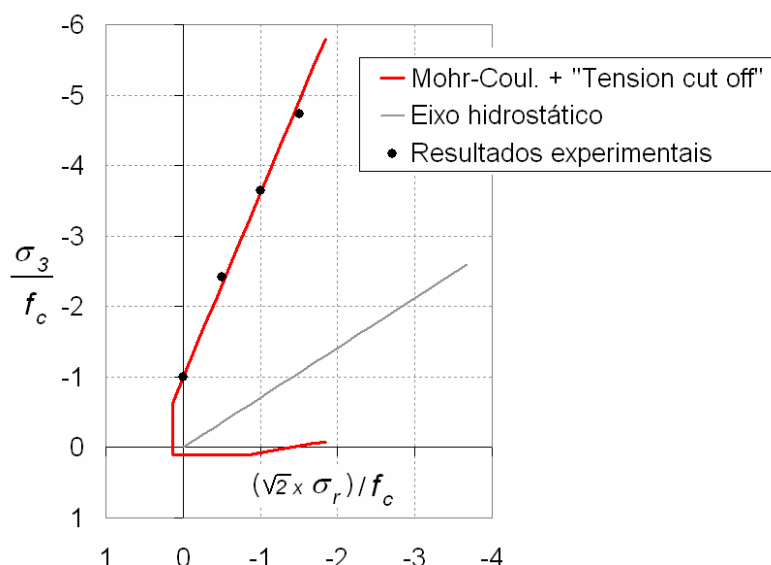


Figura 4.3 – Intersecção da superfície de Mohr-Coulomb ($\phi=35^\circ$) com o plano hidrostático, definindo totalmente a envolvente de rotura para estados de tensão axissimétricos ($\sigma_r=\sigma_1=\sigma_2$). Os resultados experimentais são os constantes da Figura 2.38.

A secção de desvio do presente critério de rotura, definida pela intersecção da superfície de rotura com um plano perpendicular ao eixo hidrostático, é formada por linhas rectas, e dado que a secção real é côncava (ver Figura 2.37), mesmo para estados de tensão não axissimétricos o critério de Mohr-Coulomb assim ajustado é conservativo para a gama de tensões de confinamento da ordem das da tensão de rotura uniaxial. Em estados de tensão biaxiais a envolvente de rotura de Mohr-Coulomb traduz-se por um quadrado no espaço das duas tensões principais não nulas, não representando o acréscimo de resistência observado experimentalmente.

Para a função potencial plástico definiu-se um ângulo de dilatância $\psi = 12.5^\circ$, com o qual foram obtidas respostas deformacionais satisfatórias.

Para o coeficiente de Poisson são referidos na literatura valores entre 0.15 e 0.22. Na generalidade das aplicações qualquer valor adoptado dentro deste intervalo não se reflecte sensivelmente na qualidade dos resultados obtidos.

De todos os modelos disponíveis no programa, o “Multifix” revelou-se o mais versátil, podendo ser aplicado na generalidade das situações, assim como o mais rigoroso na forma como lida com o processo de fissuração através do conceito de decomposição das extensões. É também o único modelo disponível susceptível de ser combinado com os efeitos viscoelásticos, permitindo a execução de análises do comportamento em serviço incluindo os efeitos diferidos. Foi ainda o modelo que demonstrou melhor desempenho em todos os exemplos de validação efectuados, tendo sido por isso adoptado como modelo de referência.

4.1.2 – Modelos “Total-Strain”

Os modelos designados por “Total-Strain” pertencem à família das formulações apresentadas em 3.2. Na implementação efectuada na corrente versão do DIANA é seguido o conceito de extensão uniaxial equivalente e o coeficiente de Poisson é considerado constante. A descarga, tanto em tracção como em compressão é feita de forma secante para a origem (*Figura 4.4*).

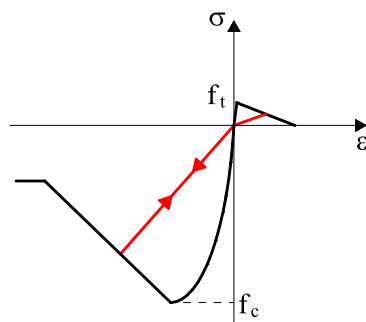


Figura 4.4 – Comportamento uniaxial dos modelos “Total-Strain” em situações de descarga e recarga.

O modelo de fendas fixas (“Fixed Total-Strain”), corresponde à formulação de fendas fixas ortogonais, sendo a rigidez de corte do betão fendilhado considerada constante e igual a βG , tendo-se adoptado $\beta = 0.1$. Tal como no modelo anterior, também não é tida em consideração a anisotropia do diagrama de “tension stiffening/softening”. As leis de comportamento adoptadas para o betão traccionado foram as mesmas já referidas para o modelo “Multifix”: a lei de amolecimento linear para o betão simples, com a largura da banda de fendilhação determinada por (4.1), e o diagrama de retenção de tensões bi-linear para o betão armado. No que se refere à lei uniaxial equivalente para o betão comprimido, adoptou-se igualmente o diagrama definido pela expressão do (fib 1999a) até à tensão de pico e com um ramo de amolecimento linear, tal como definido na *Figura 4.2 b*).

Está também disponível uma versão com fendas rotativas (“Rotating Total-Strain”), de acordo com o que foi apresentado em 3.2.3.2. As leis de comportamento uniaxial adoptadas, quer em tracção quer em compressão, foram as mesmas acima referidas para os modelos de fendas fixas.

Nos exemplos estudados, considerou-se sempre um coeficiente de Poisson nulo. Na realidade, na implementação disponível dos modelos baseados em extensões totais, o coeficiente de Poisson, uma vez definido, é considerado constante, mesmo no betão fendilhado, o que é manifestamente incorrecto. Quando se inicia o processo de fractura, o betão nas proximidades da ainda incipiente fissura começa a descarregar, conforme exposto na *Figura 2.10* (Capítulo 2). A diminuição das extensões elásticas acarreta a consequente diminuição das extensões transversais. Este facto é modelado de forma consistente nos modelos com decomposição das extensões, sendo devidamente captada a recuperação da extensão transversal. Nos modelos baseados num conceito de extensão total, a recuperação da extensão transversal não é

reproduzida, pois não é feita a distinção entre extensões elásticas e extensões devidas às fissuras. A consideração de um efeito de Poisson constante no betão fendilhado faz com que, no caso de fissuras muito abertas, a deformação transversal à fissura seja importante, introduzindo perturbações sem significado físico no campo de tensões. Desta forma, é prática corrente desprezar o efeito de Poisson no betão traccionado sempre que se usam modelos deste tipo. Nos testes efectuados, este facto revelou-se de grande importância na qualidade do padrão de fendilhação obtido e, consequentemente, na correcta reprodução das respostas estruturais.

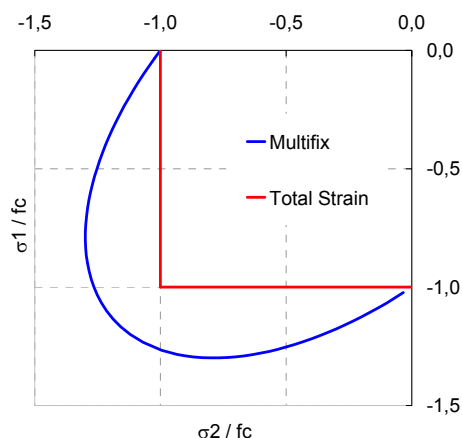


Figura 4.5 – Envolve de rotura biaxial considerada nos modelos “Total-Strain”.

Com estas considerações conclui-se que este tipo de modelos apenas será adequado em situações onde o aumento de resistência do betão comprimido devido aos efeitos de confinamento não seja determinante para a resposta estrutural. Na *Figura 4.5* está representada a comparação entre as envolventes de rotura consideradas nos modelos até agora descritos, para o caso biaxial.

4.1.3 – Modelo “Rankine/Drucker-Prager”

O modelo “Rankine/Drucker-Prager” é um modelo elasto-plástico em tracção e compressão, tendo sido descrito, no essencial, em 3.4.5, a propósito dos modelos elasto-plásticos com múltiplas superfícies de cedência. A corrente implementação deste modelo não permite a sua aplicação ao caso tridimensional, tendo sido utilizado neste trabalho apenas em estado plano de tensão. Dado que, em compressão, a superfície de cedência escolhida corresponde ao critério de Drucker-Prager, os parâmetros adoptados para a definir, o respectivo diagrama de endurecimento e a lei de escoamento, foram os já referidos para o modelo “Multifix”. Em tracção, o diagrama de amolecimento do critério de Rankine foi definido de forma a respeitar as mesmas leis já utilizadas nos restantes modelos, quer no caso de betão simples ou no caso do betão armado.

4.2 – APLICAÇÕES

As aplicações foram seleccionadas no intuito de ilustrar a aplicabilidade dos modelos de análise não linear ao estudo de algumas estruturas cujo comportamento não é satisfatoriamente aferido pelos métodos tradicionais de cálculo, como sejam a análise elástica ou a análise plástica limite, ou ainda estruturas cujo tratamento numérico apresenta em geral dificuldades acrescidas, tais como as roturas por corte. Com estes exemplos pretendeu-se ainda avaliar o desempenho e validar procedimentos de aplicação dos modelos disponíveis, possibilitando posteriores aplicações na avaliação do comportamento em serviço e segurança à rotura de estruturas mais complexas.

Nos exemplos estudados, a armadura foi modelada de acordo com uma formulação que considera que os deslocamentos dos elementos finitos de armadura são interpolados a partir dos deslocamentos dos nós dos elementos de betão em que estão embebidos. Esta forma de proceder simplifica substancialmente a geração das malhas de elementos finitos, na medida em que os nós dos dois tipos de elementos não necessitam de ser coincidentes. No caso de armaduras distribuídas dispostas em malha, são utilizados elementos bidimensionais apenas com rigidez axial na direcção dos feixes de armadura, no caso de varões isolados, são utilizados elementos de barra. Detalhes sobre este tipo de formulação podem ser encontrados em (Barros 1995; Feenstra 1993; Póvoas 1991). A aderência entre os dois materiais é modelada de forma indirecta através do conceito de diagrama de retenção de tensões no betão.

Foi dada atenção especial à interpretação física e identificação das roturas nos modelos numéricos. Na análise de estruturas com comportamento frágil, é prática corrente relacionar uma divergência do algoritmo iterativo de solução com uma rotura. Conforme evidenciado por (Borst e Nauta 1985), este é um procedimento incorrecto, na medida em que a divergência pode ter origem numa insuficiência do referido algoritmo ou na escolha do esquema de integração utilizado, não tendo subjacente qualquer fundamento físico. Baseado em análises preliminares, e também de acordo com as constatações de (Borst e Nauta 1985), para obtenção do estado de equilíbrio correspondente a cada incremento de carga, adoptou-se um algoritmo iterativo baseado numa formulação secante (ou Quasi-Newton) e usualmente designado por BFGS (Witte e Kikstra 2002a). Este algoritmo revelou-se mais robusto que o tradicional método de Newton-Raphson. Os resultados óptimos foram obtidos com a utilização conjunta de um algoritmo de correcção baseado na técnica “Line Search” (Witte e Kikstra 2002a). O critério de convergência da solução correspondente a cada incremento de carga baseou-se na verificação do valor da norma da energia, impondo a condição,

$$\frac{\delta E_i}{\Delta E_0} = \left| \frac{\delta u_i^T (f_{\text{int},i+1} + f_{\text{int},i})}{\Delta u_0^T (f_{\text{int},1} + f_{\text{int},0})} \right| \leq 10^{-4} \quad (4.24)$$

As variáveis intervenientes estão explicitadas na *Figura 4.6*, onde g_i são as forças residuais correspondentes à iteração i ,

$$g_i = {}^{t+\Delta t}f_{\text{ext}} - f_{\text{int},i} \quad (4.25)$$

Esta norma revelou-se mais versátil do que a norma das forças residuais ou a norma dos deslocamentos incrementais, podendo ser usada tanto em respostas dúcteis ou muito rígidas. Refira-se ainda que todas as curvas e figuras que irão ser apresentadas, obtidas dos cálculos efectuados, apenas contêm resultados convergidos.

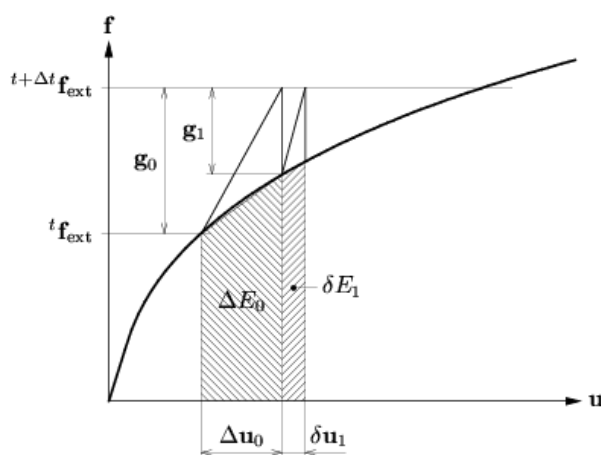


Figura 4.6 – Método incremental e iterativo. Definição da norma da energia.

4.2.1 – Análise de vigas com roturas por corte

4.2.1.1 – Viga sem estribos

A viga analisada foi testada experimentalmente por Walraven, tendo sido alvo de análises numéricas por vários autores (Barros 1995; Borst e Nauta 1985; Feenstra et al. 1991b; Póvoas 1991). Trata-se de uma viga com a geometria indicada na *Figura 4.7*, solicitada por duas cargas pontuais, e na qual não foram dispostos estribos. A relação vão de corte/altura útil é igual a 3. A rotura experimental deu-se por corte, para uma carga de cerca de 69 kN por actuador, de forma súbita, sem esmagamento do betão no banzo comprimido e com a armadura de flexão ainda em regime elástico, podendo ser classificada como uma rotura por corte/tracção. A análise desta viga coloca um excelente desafio aos modelos de fendilhação e aos algoritmos iterativos de solução, sendo basicamente independente do modelo de compressão adoptado.

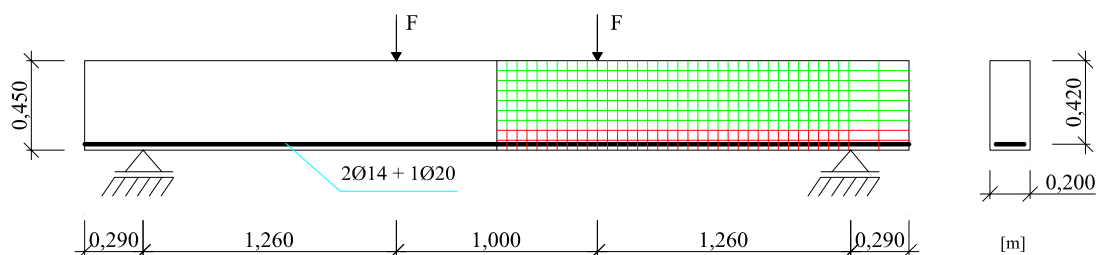


Figura 4.7 – Geometria e malha de elementos finitos da viga analisada. A vermelho estão indicados os elementos onde se utilizou o diagrama de retenção de tensões no betão.

A viga foi discretizada, com condições de simetria a meio vão, em elementos quadráticos de oito nós, de 5 cm de lado, com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss). Numa altura de 10 cm a contar da base foi considerado o diagrama de retenção de tensões no betão, nos restantes elementos adoptou-se um diagrama de amolecimento linear. A armadura foi modelada através de elementos de barra embebidos nos elementos de betão. A carga foi aplicada com controlo de deslocamentos. As propriedades consideradas para os materiais estão sumariadas na *Tabela 4.1*.

Tabela 4.1 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO	
$f_{cm} = 20 \text{ MPa}$	$f_t = 2.5 \text{ Mpa}$
$G_f = 60 \text{ N/m}$	$G_c = 12500 \text{ N/m}$
AÇO	
$A_s = 6.22 \text{ cm}^2 (1 \phi 20 + 2 \phi 14)$	$f_{sy} = 440 \text{ MPa}$

Numa primeira análise, com o valor por defeito do “threshold angle” $\alpha = 60^\circ$, obteve-se a curva carga/deslocamento da *Figura 4.9*, cujo ajuste à curva medida experimentalmente se pode considerar muito bom. Por mais pequenos incrementos de carga que se utilizassem, não foi possível obter convergência para além do último incremento representado, correspondente a uma carga de 81.4 kN, cerca de 18% superior à carga experimental. No incremento não convergido é possível verificar-se a formação de uma banda fendilhada diagonal, responsável pelas dificuldades encontradas no processo de convergência. No último incremento convergido, a distribuição de tensões ao longo da armadura longitudinal está representada na *Figura 4.10*, onde se constata que está no início da cedência. Dado que não se obteve um queda (convergida) no diagrama carga/deslocamento, não é possível inequivocamente afirmar que o modelo captou uma rotura física da viga, embora a formação da banda fendilhada diagonal aponte nesse sentido. Ensaio sobre vigas sem armadura de esforço transversal evidenciaram a formação de uma fenda diagonal visível, cuja evolução leva à rotura, ligeiramente antes da carga última (Vecchio e Shim 2004).

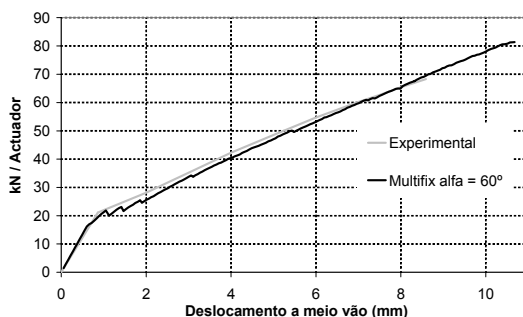


Figura 4.8 – Diagrama carga/deslocamento a meio vão para $\alpha = 60^\circ$.

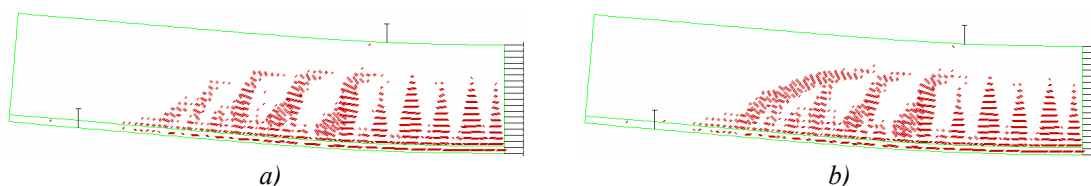


Figura 4.9 – Viga deformada (10x) para $\alpha = 60^\circ$, com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (10x): a) no último incremento de carga convergido; b) no incremento não convergido.

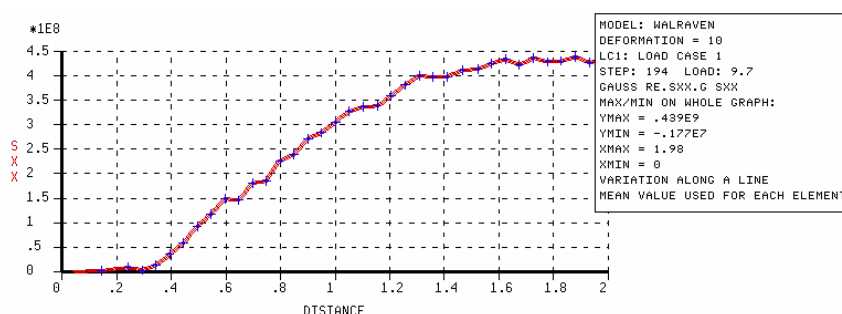


Figura 4.10 – Tensões ao longo da armadura no último incremento convergido para $\alpha = 60^\circ$.

Conduziu-se ainda uma análise com um valor de $\alpha = 30^\circ$. O diagrama carga/deslocamento está representado na Figura 4.11, onde se observa mais uma vez uma excelente concordância com a rigidez medida experimentalmente. A carga máxima calculada foi de 77 kN, cerca de 12% superior à experimental. Na parte final do diagrama existem ligeiras quebras que estão representadas com mais pormenor na Figura 4.12. A cada uma destas pequenas quedas da carga aplicada correspondem incrementos (convergidados) que levaram à propagação duma fenda diagonal, típica da rotura por corte/tracção. As deformadas incrementais correspondentes estão ilustradas na Figura 4.13, sendo visível a propagação da fenda de corte na direcção do ponto de aplicação da carga.

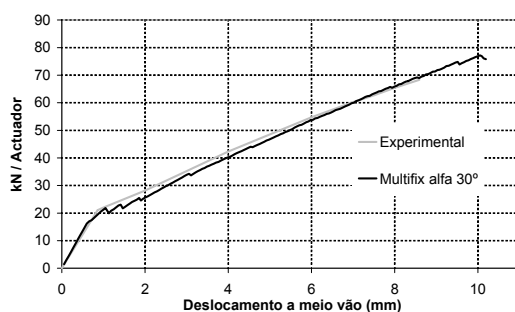


Figura 4.11 – Diagrama carga/deslocamento a meio vão para $\alpha = 30^\circ$.

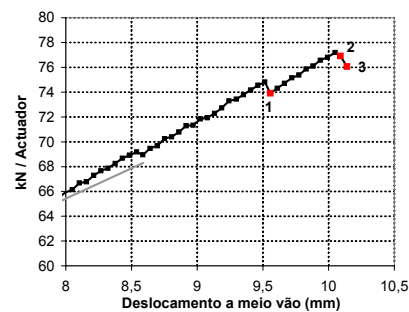


Figura 4.12 – Fase final do diagrama, com indicação dos incrementos (convergid) cujas deformadas incrementais estão representadas na Figura 4.13.

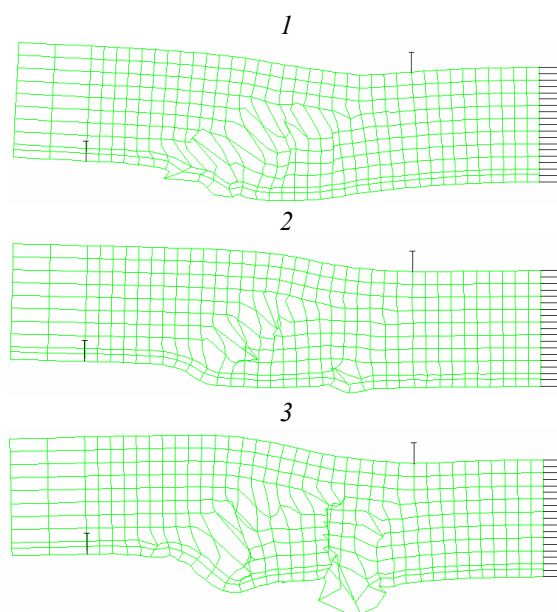


Figura 4.13 – Deformadas incrementais (2000x) dos três incrementos de carga indicados na Figura 4.12.

O padrão de fendilhação experimental imediatamente antes da rotura está ilustrado na Figura 4.14, sendo notória a sua semelhança ao padrão de fendilhação numérico da Figura 4.15, apesar de se notar uma ligeira tendência para a propagação das fissuras paralelamente aos lados dos elementos finitos. Note-se que na representação adoptada para as fendas, a fendilhação espúria é quase eliminada, dado que o tamanho dos vectores é proporcional ao valor da extensão correspondente. No incremento correspondente à carga máxima, as tensões ao longo da armadura estão representadas na Figura 4.16, constatando-se que a armadura está ainda em regime elástico.

Do que foi atrás exposto pode-se concluir que com adopção do valor de $\alpha = 30^\circ$, a rotura por corte/tracção foi devidamente modelada, na medida em que foi possível obter resultados convergid nos quais se dá a propagação de uma fenda diagonal típica de uma rotura por corte, levando a um decréscimo da carga. Por outro lado, na carga máxima, a tensão máxima no betão

é sempre inferior a f_c e as armaduras estão em regime elástico, o que também está de acordo com as observações experimentais.

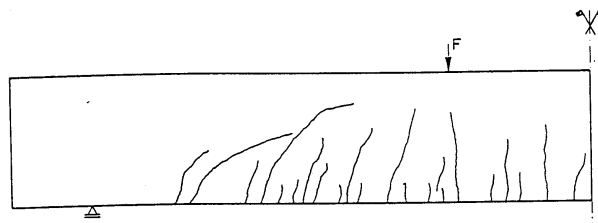


Figura 4.14 – Padrão de fendilhação experimental imediatamente antes da rotura (Borst e Nauta 1985).

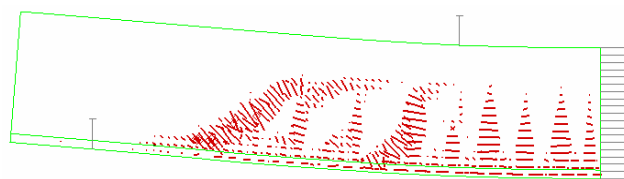


Figura 4.15 – Viga deformada (10x) para $\alpha = 30^\circ$, com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (10x) no último incremento de carga convergido.

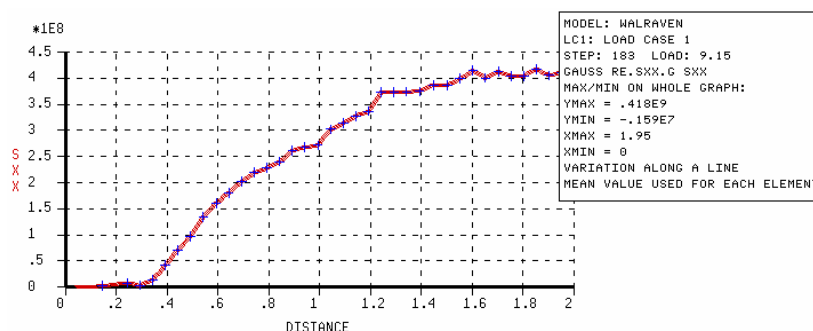


Figura 4.16 – Tensões ao longo da armadura no incremento correspondente à carga máxima ($\alpha = 30^\circ$).

A adopção de um ângulo $\alpha = 30^\circ$ pode na realidade ser justificada através da observação experimental da direcção e ordem de propagação das fissuras numa viga como a analisada. Com efeito, antes de ocorrer fendilhação o estado de equilíbrio é muito próximo do obtido através de uma distribuição elástica de esforços. A primeira fendilhação ocorre nas zonas de momentos mais elevados, originando invariavelmente fendas verticais. Há medida que a carga aumenta, a extensão da região fendilhada evolui, obrigando à redistribuição de tensões. Os sucessivos estados de equilíbrio afastam-se cada vez mais da distribuição elástica, começando a surgir fendas diagonais devido às tensões principais inclinadas. Nesta fase, dada a modificação do estado de equilíbrio, muitas das fendas de flexão anteriormente formadas deixam de se propagar, iniciando até um processo de regressão, sendo atravessadas por fendas diagonais. Este atravessamento dá-se com ângulos variáveis, cujo limite inferior de 30° é um valor razoável (Figura 4.17), podendo ser encarado como um compromisso entre a realidade física e a robustez

necessária ao algoritmo. Se o modelo numérico não prever esta possibilidade, as soluções obtidas serão necessariamente contra a segurança, na medida em que a propagação da fenda de corte pode ser inibida ou atrasada, impedindo a concretização do correcto modelo cinemático de rotura que interrompe a transição entre sucessivos estados de equilíbrio.

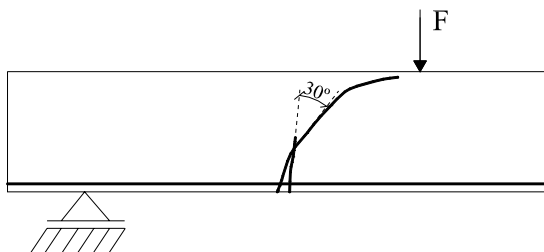


Figura 4.17 – Representação esquemática da propagação de uma fenda de corte, com intersecção duma fenda de flexão que entretanto entrou em descarga. Adequação da adopção de um valor de 30° para o ângulo α .

No exemplo analisado, considerando $\alpha = 60^\circ$, a fenda diagonal forma-se para uma carga mais elevada e ligeiramente deslocada para a esquerda (onde as fendas de flexão estão menos desenvolvidas), devido ao facto de a localização prevista com $\alpha = 30^\circ$ ter sido inibida. Desta forma pode-se também encontrar uma justificação para o facto de não ter sido possível obter uma solução convergida com a propagação da fenda diagonal para $\alpha = 60^\circ$, na medida em que a energia acumulada para ser dissipada na propagação desta fissura é mais elevada, aumentando o carácter brusco da rotura.

A influência do coeficiente de redução da rigidez de corte β no modo e carga de rotura é reduzida. Uma análise com $\beta = 0.4$, valor quatro vezes superior ao anteriormente utilizado, mantendo o valor de $\alpha = 30^\circ$, conduziu ao modo de rotura e carga máxima anteriormente calculados. Observou-se no entanto uma maior velocidade de convergência, resultando num tempo de cálculo cerca de 20% inferior. A aplicação do modelo “Fixed Total Strain” conduz a tempos de cálculo na ordem dos 60% dos do modelo com decomposição das extensões. Neste caso, porém, não ocorreu rotura por corte, tendo sido obtidos resultados convergidos no patamar de cedência, tendo sido interrompida a análise quando o deslocamento a meio vão atingiu os 11,5 mm. O modo de rotura identificado corresponde a uma rotura por flexão, conforme indicam as fendas verticais extremamente activas da Figura 4.18. Na Figura 4.19 estão representadas as curvas carga/deslocamento correspondentes a cada uma das modelações atrás referidas.

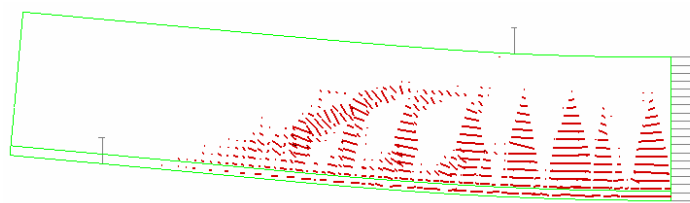


Figura 4.18 – Aplicação do modelo “Fixed Total Strain”. Viga deformada (10x), com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (10x) no último incremento de carga considerado.

Refira-se ainda que, tanto com o modelo “Rankine/Drucker-Prager”, como com a versão de fendas rotativas do modelo “Total-Strain”, não foi possível obter resultados convergidos a partir de cerca de 25% da carga de rotura.

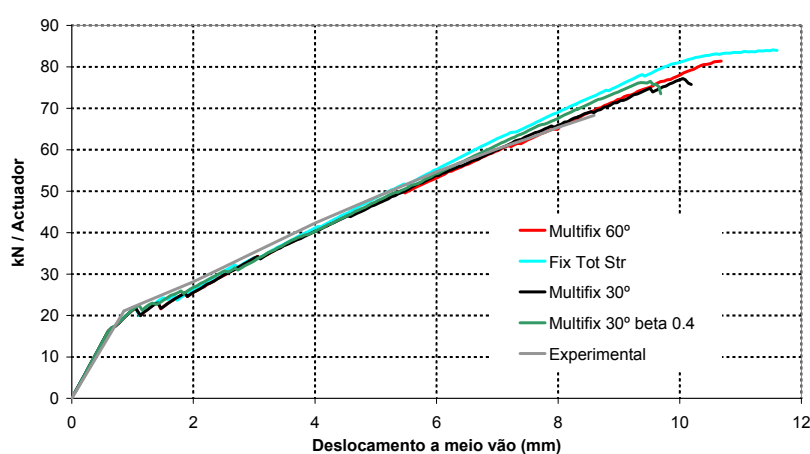


Figura 4.19 – Curvas carga/deslocamento para as diferentes modelações efectuadas.

4.2.1.2 – Viga com estribos mínimos

A viga analisada foi originalmente testada no âmbito de um vasto estudo experimental realizado por (Bresler e Scordelis 1963) no intuito de estudar o comportamento ao corte de vigas de betão armado, todas elas contendo armadura longitudinal em quantidade suficiente para que a rotura ocorresse antes da cedência. Todos os doze ensaios então realizados foram repetidos por (Vecchio e Shim 2004), com o objectivo de testar a reprodutibilidade dos resultados, o que foi conseguido com assinalável sucesso, dado todos os modos de rotura serem idênticos aos originalmente descritos. Considerando a fiabilidade e qualidade dos resultados experimentais, e dada a variedade de relações vão/altura útil testados e de modos de rotura obtidos, esta série de ensaios constitui um excelente conjunto de resultados para validação e calibração de modelos numéricos. No que a seguir se apresenta vão ser adoptados os dados e os resultados obtidos na série original de ensaios.

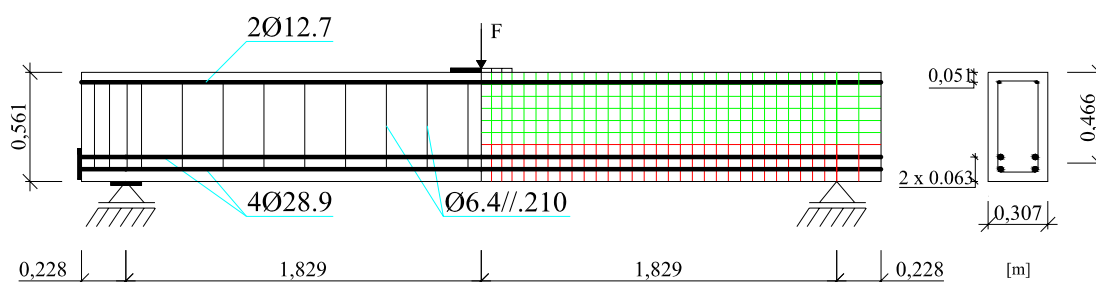


Figura 4.20 – Geometria e malha de elementos finitos da viga analisada. A vermelho estão indicados os elementos onde se utilizou o diagrama de retenção de tensões no betão.

A viga analisada é pertencente à série A, contendo uma percentagem baixa de estribos $\rho_w = 0.001$ (próxima da mínima regulamentar), e tem uma secção do tipo 1, a que corresponde uma relação vão de corte/altura útil aproximadamente igual a 4. A geometria da viga A1 está representada na Figura 4.20, e as características dos materiais na Tabela 4.2. A viga foi discretizada em elementos quadráticos de oito nós com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss), as armaduras longitudinais foram modeladas de forma discreta e os estribos de forma distribuída. Note-se que apesar de os estribos serem os mínimos regulamentares, a percentagem de armadura correspondente é inferior a ρ_{MIN} , pelo que apenas se adoptou o diagrama de retenção de tensões no betão nos elementos mais próximos da armadura de flexão. A carga foi aplicada com controlo de deslocamentos.

Tabela 4.2 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO		
$f_{cm} = 24.1 \text{ MPa}$		$f_t = 1.80 \text{ Mpa (*)}$
$G_f = 60 \text{ N/m (*)}$		$G_c = 15000 \text{ N/m (*)}$
AÇO		
$\phi 28.9$	$f_{sy} = 555 \text{ MPa}$	$E_s = 218 \text{ GPa}$
$\phi 12.7$	$f_{sy} = 345 \text{ MPa}$	$E_s = 201 \text{ GPa}$
$\phi 6.4$	$f_{sy} = 325 \text{ MPa}$	$E_s = 190 \text{ GPa}$
Os valores assinalados com (*) foram estimados.		

A rotura experimental deu-se para uma carga de 467 kN, de forma brusca, com o padrão de fendilhação ilustrado na Figura 4.21, sem grande extensão das fendas de flexão e com as fendas inclinadas evidenciando aberturas de cerca de 2 mm. Contrariamente ao caso das vigas sem estribos, a fendilhação diagonal formou-se a cerca de 60% da carga máxima e a rotura deu-se com esmagamento do betão na zona de compressão.

A modelação numérica foi efectuada adoptando um valor de $\alpha = 30^\circ$, baseado nas observações do exemplo anterior. O padrão de fendilhação no último incremento convergido está representado na *Figura 4.22*, sendo muito boa a sua concordância com o experimental (*Figura 4.21*). A fenda inclinada que levou à rotura no ensaio está devidamente representada, incluindo a sua propagação ao longo da armadura longitudinal, intersectando fendas verticais previamente formadas. Em alguns casos registou-se a ocorrência de três fendas por ponto de integração, podendo ser considerada satisfatória a robustez do algoritmo no tratamento destas situações, apesar das dificuldades encontradas em obter soluções convergidas nesta fase. As tensões nos estribos estão ilustradas na *Figura 4.23*, permitindo confirmar a sua cedência ao longo das fendas mais activas. O diagrama carga/deslocamento está representado na *Figura 4.24*. A rigidez da viga foi reproduzida de forma excelente até aos 375 kN, prevendo o modelo, a partir daí, um pequeno acréscimo de rigidez. A carga máxima calculada foi de 428 kN, cerca de 8% inferior à experimental. A maior diferença reside, no entanto, no valor do deslocamento para o qual se dá a rotura. No valor máximo da carga foi calculado um deslocamento a meio vão de 10 mm, contra os cerca de 14 mm medidos experimentalmente. Com efeito, a rotura experimental, assim como a rotura numérica, deu-se com esmagamento do betão e, no modelo numérico, o confinamento tridimensional conferido pela placa onde é introduzida a carga não é modelado. Além do aumento de resistência proporcionado ao betão circundante, o aumento de ductilidade terá tido influência na resposta estrutural. Tal como já constatado por (Kotsovos e Pavlovic 1995; Vecchio e Shim 2004) os estados tridimensionais de tensão são fundamentais para reproduzir este tipo de roturas. Num modelo 2D, isto poderia ser obviado atribuindo uma maior energia de fractura em compressão ao betão desta região, procurando aumentar a sua ductilidade. No entanto este seria um critério de generalização muito discutível, apenas com o objectivo de ajustar os resultados calculados aos experimentais. Um outro factor que poderia contribuir para a melhoria dos resultados é a forma como é definida lei tensão-extensão no referencial de fissura. Esta lei é sem dúvida dependente da orientação da armadura em relação à fenda. Na viga analisada, as fissuras horizontais nas proximidades da armadura de flexão deveriam ser regidas por uma lei de amolecimento, e as verticais, perpendiculares à armadura de flexão, pelo diagrama de retenção de tensões. O acréscimo de rigidez observado na resposta numérica a partir dos 375 kN pode não só a esse aspecto ser devido, mas também ao facto de o modelo não poder reproduzir os escorregamentos entre as armaduras de flexão e o betão, devidos à degradação da aderência ao longo da fenda longitudinal.



Figura 4.21 – Padrão experimental de fendilhação na rotura (Vecchio e Shim 2004).

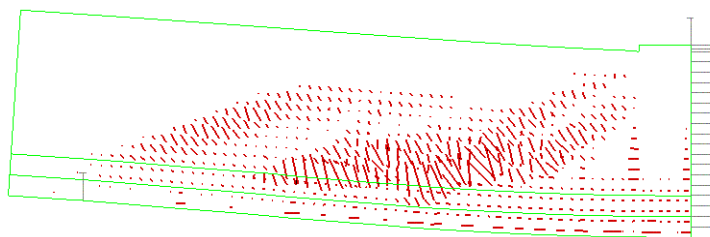


Figura 4.22 – Viga deformada (10x) para $\alpha = 30^\circ$, com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (7.5x) no último incremento de carga convergido.

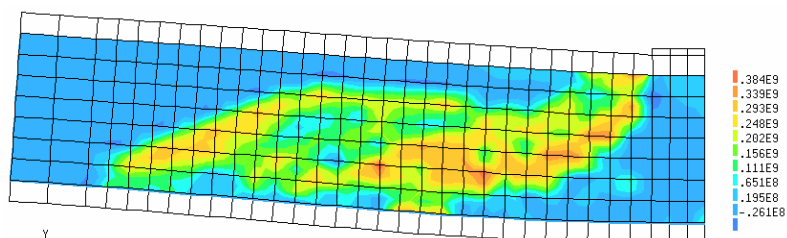


Figura 4.23 – Mapas com os valores das tensões nos estribos no último incremento de carga convergido.

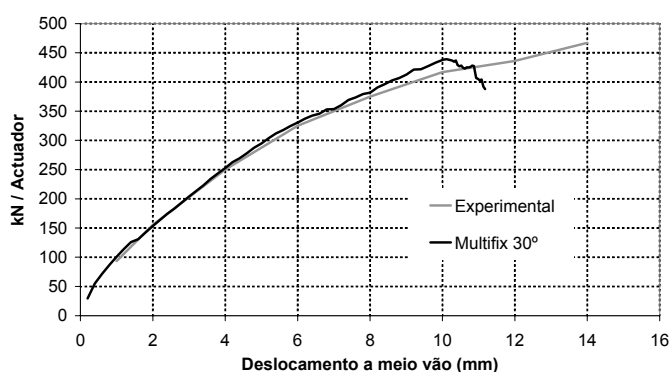


Figura 4.24 – Diagrama carga/deslocamento a meio vão.

O mapa das tensões principais está representado na Figura 4.25, sendo visível que as tensões máximas de compressão ocorrem ligeiramente abaixo da face superior da viga, na medida em que nesta zona o betão está em acentuado regime de amolecimento. A redistribuição de tensões resultante está de acordo com as observações experimentais que evidenciaram grande degradação do betão nesta região.

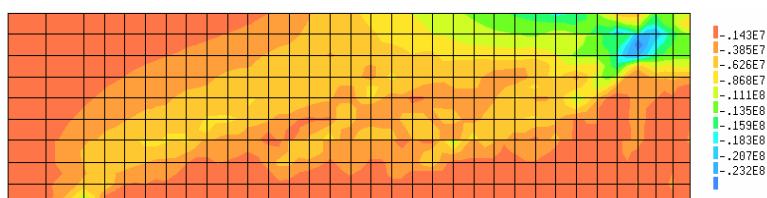


Figura 4.25 – Mapas com os valores das tensões principais de compressão no betão no último incremento de carga convergido.

Foram também efectuadas análises com os restantes modelos disponíveis, cujos resultados são apresentados na *Figura 4.26*. Nos modelos “*Total Strain*”, nos quais o efeito do confinamento bidimensional não é considerado, e dado que este tipo de rotura é condicionado pelo esmagamento do betão, nos seis elementos finitos do canto superior direito do modelo foi considerada uma tensão de rotura por compressão igual a $1.15 f_c$.

Com o modelo “*Fixed Total-Strain*”, a rotura também se deu com o esmagamento do betão sob a placa onde é introduzida a carga. O padrão de fendilhação para a carga máxima está ilustrado na *Figura 4.27 a)*, onde é visível que a fenda mais activa na rotura do modelo experimental não está bem representada. Ao contrário do padrão de fendas observado com o modelo “*Multifix*”, a impossibilidade de ocorrência de fissuras não ortogonais impediu a propagação da referida fissura ao longo da armadura longitudinal de tracção, intersectando as fissuras previamente formadas. Este facto pode ser responsável pelo excesso de rigidez da resposta a partir dos 200 kN. O mapa com as tensões principais de compressão está representado na *Figura 4.27 b)*.

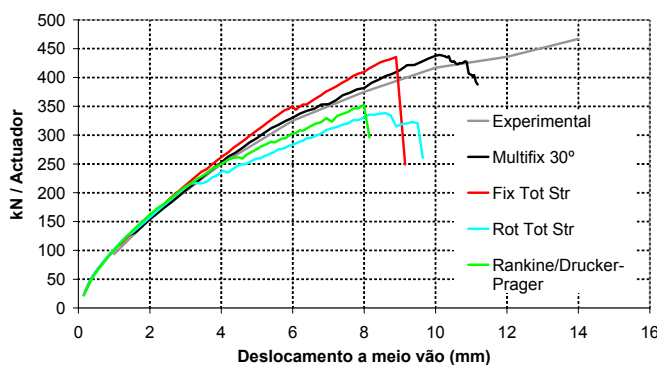


Figura 4.26 – Curvas carga/deslocamento para as diferentes modelações efectuadas.

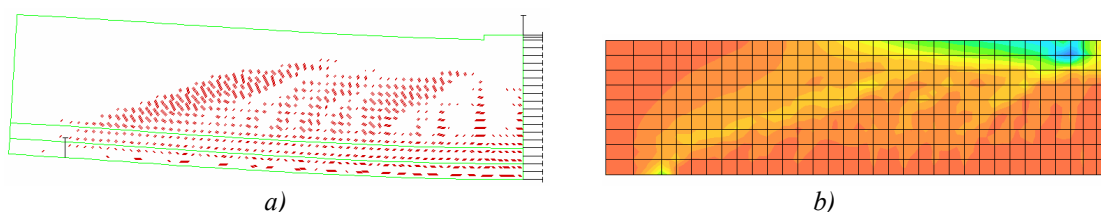


Figura 4.27 – Resultados obtidos, na carga máxima, com o modelo “*Fixed Total-Strain*”: a) Viga deformada (10x) com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (7.5x). b) Mapas das tensões principais de compressão no betão.

As análises efectuadas com os modelos “*Rotating Total-Strain*” e com o modelo “*Rankine Drucker-Prager*” conduziram, entre eles, a resultados muito semelhantes. Com estes modelos a rotura ocorre para uma carga substancialmente inferior à experimental, e o padrão de fendas é caracterizado pela existência de uma única fenda dominante, conforme se mostra na *Figura 4.28 a)* e na *Figura 4.29 a)*. Da análise dos mapas com as tensões principais, *Figura 4.28 b)* e *Figura 4.29 b)*, observa-se que a carga é transmitida directamente para o apoio, não se formando o esquema de equilíbrio em treliça característico das vigas com estribos e armadura longitudinal

aderente. Note-se que este esquema de equilíbrio pode ser inferido dos mapas das tensões principais nas análises com os modelos de fendas fixas (*Figura 4.25 e Figura 4.27 b*)), apesar do efeito de arco atirantado ser também visível. A utilização de formulações co-rotacionais na análise de vigas nas quais o efeito de apoio directo não constitua o principal processo de transmissão de carga conduzirá invariavelmente a resultados desadequados, dado que este tipo de modelos pressupõe a existência de ductilidade suficiente para permitir a reorientação do campo de tensões, o que apenas será possível nas estruturas fortemente armadas. Este exemplo veio comprovar as considerações tecidas em 3.2.3.2 acerca dos modelos de fendas rotativas.

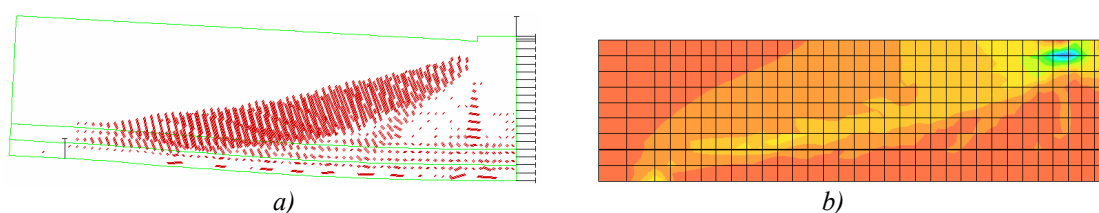


Figura 4.28 – Resultados obtidos, na carga máxima, com o modelo “Rotating Total-Strain”: a) Viga deformada (10x) com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (7.5x). b) Mapas das tensões principais de compressão no betão.

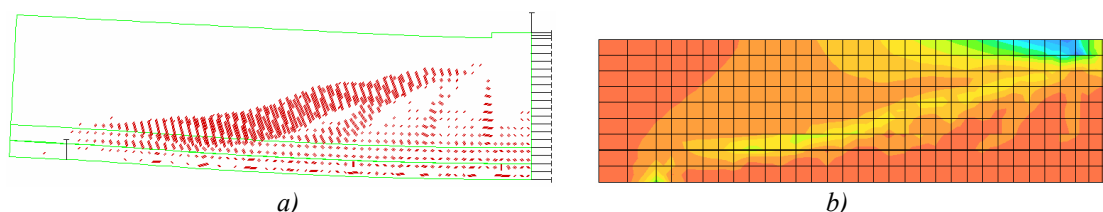


Figura 4.29 – Resultados obtidos, na carga máxima, com o modelo “Rankine/Drucker-Prager”: a) Viga deformada (10x) com os vectores perpendiculares à abertura das fendas (7.5x). b) Mapas das tensões principais de compressão no betão.

4.2.2 – Análise de uma parede com aberturas

4.2.2.1 – Formulação do problema

No sentido de avaliar a resposta estrutural de uma parede de betão armado sujeita a cargas no seu plano, com uma geometria caracterizada pela existência de regiões de descontinuidade, foi desenvolvido um detalhado estudo experimental descrito em (Bounassard Filho 1995). A geometria da parede (*Figura 4.30*) pode facilmente ser assimilada à de um elemento de contraventamento de um edifício. O procedimento clássico de análise deste tipo de estruturas consiste na construção de um modelo de escoras e tirantes baseado nas trajectórias das tensões principais elásticas. O dimensionamento e verificação de segurança são efectuados com base nestes modelos e, caso a estrutura tenha ductilidade suficiente, têm suporte teórico baseado no teorema do limite inferior da teoria da plasticidade.

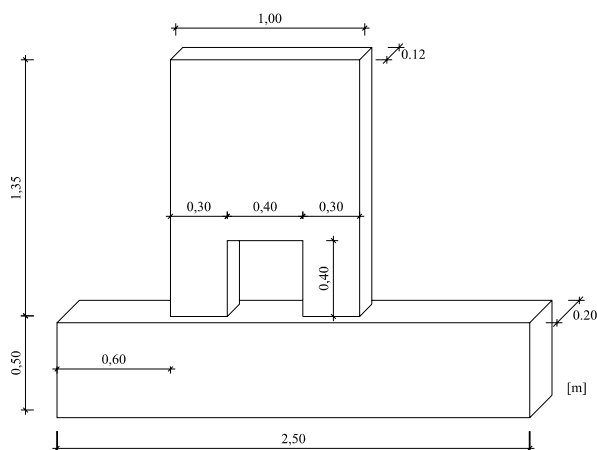


Figura 4.30 – Geometria da parede.

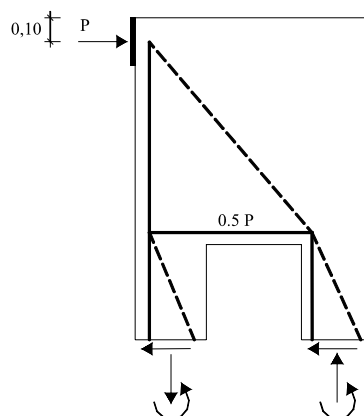


Figura 4.31 – Exemplo de um modelo básico de transmissão das cargas.

No entanto, os modelos de escoras e tirantes são modelos de equilíbrio limite, não respeitando a condição de compatibilidade de deformações. Na parede em análise este aspecto merece especial atenção, na medida em que é hiperestático qualquer esquema de equilíbrio que tente aproximar a distribuição elástica de esforços, repartindo igualmente o corte basal e os momentos de encastramento por ambos os pilares (Figura 4.31). No presente caso, estando o pilar esquerdo sujeito a esforços de tracção, a sua rigidez vai ser substancialmente reduzida, originando uma repartição assimétrica da carga pelos pilares. Os resultados experimentais obtidos por (Bounassard Filho 1995) revelaram que as paredes que foram dimensionadas para uma distribuição simétrica do corte basal (esforços elásticos), apresentaram na rotura distribuições do tipo 20% a 25% no pilar esquerdo e 80% a 75% no pilar direito. No caso de paredes dimensionadas para uma distribuição 30% à esquerda e 70% à direita apresentaram uma repartição de carga da ordem de 10% e 90%, respectivamente. A designação de pilar é aqui utilizada apenas por facilidade, na medida em que se refere a uma região de descontinuidade e não a um elemento linear.

Pretende-se com este exemplo demonstrar a aplicabilidade dos modelos computacionais na interpretação do funcionamento da estrutura descrita, avaliando a sua robustez e precisão na identificação da carga e do mecanismo de colapso. Das várias disposições de armadura correspondentes a cada um dos modelos experimentais referidos em (Bounassard Filho 1995) descreve-se apenas uma, cujo dimensionamento foi efectuado com base numa distribuição elástica de esforços, segundo o modelo de escoras e tirantes representado na Figura 4.32, para uma carga $P = 350$ kN. Deve-se referir que o dimensionamento foi efectuado considerando um betão com uma resistência à compressão média $f_{cm} = 33$ MPa, enquanto que o betão efectivamente colocado na parede apresentou $f_{cm} = 42$ MPa. As armaduras foram dispostas conforme representadas na Figura 4.33.

habitual diagrama tensão/extensão uniaxial com ramo de amolecimento linear definido pela energia de fractura em compressão, G_c . Dado não ser possível reproduzir o efeito de confinamento tridimensional conferido pela cintagem ao betão com recurso a um estado plano de tensão, adoptou-se ainda um diagrama definido de acordo com as disposições do MC90 relativas ao aumento de resistência e ductilidade no betão cintado nas zonas indicadas na (Figura 4.34). A tensão máxima e a extensão de pico assim obtidas foram ainda corrigidas de forma a ter em linha de conta o aumento de resistência do betão em estados biaxiais já contemplado no modelo numérico. Desta forma, a consideração do efeito de cintagem permite considerar uma resistência corrigida de $f_{cc,cf}^* = 46.0$ MPa e um aumento de ductilidade ilustrado na (Figura 4.35).

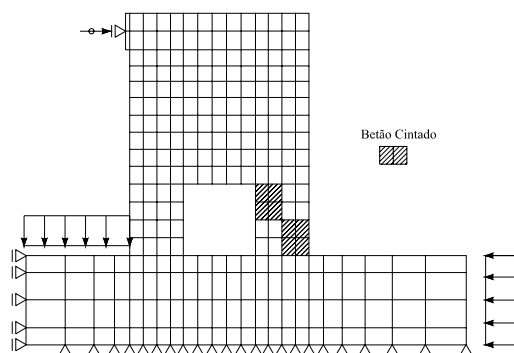


Figura 4.34 – Malha de elementos finitos com as zonas onde foi considerado o efeito da cintagem.

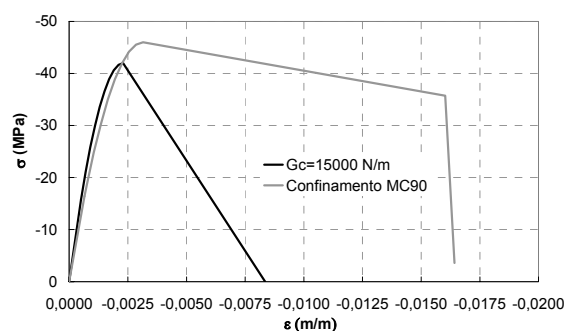


Figura 4.35 – Diagramas uniaxiais tensão-extensão.

As características usadas para os materiais estão sumariadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO			
Não cintado	$f_{cm} = 42$ MPa	$f_t = 3.0$ MPa (*)	$G_c = 15000$ N/m (*)
Cintado	$f_{cc,cf}^* = 46$ MPa	$f_t = 3.0$ MPa (*)	$\epsilon_{c,cf,85}^* = 0.016$
AÇO			
$\phi 6$	$f_{sy} = 480$ MPa	$f_{su} = 630$ MPa	
$\phi 8$	$f_{sy} = 560$ MPa	$f_{su} = 644$ MPa	
$\phi 10$	$f_{sy} = 530$ MPa	$f_{su} = 670$ MPa	
$\phi 16$	$f_{sy} = 600$ MPa	$f_{su} = 666$ MPa	
Os valores assinalados com (*) foram estimados.			

Na Figura 4.36 está representado o padrão experimental de fendas na rotura (correspondente a uma carga de 413 kN). O modo de ruína foi identificado como sendo uma rotura da escora diagonal do pilar direito, sendo evidente o destacamento do betão de recobrimento no canto superior esquerdo do pilar. No canto inferior direito é visível a grande abertura de fendas denunciadora da cedência das cintas que conferem o confinamento.

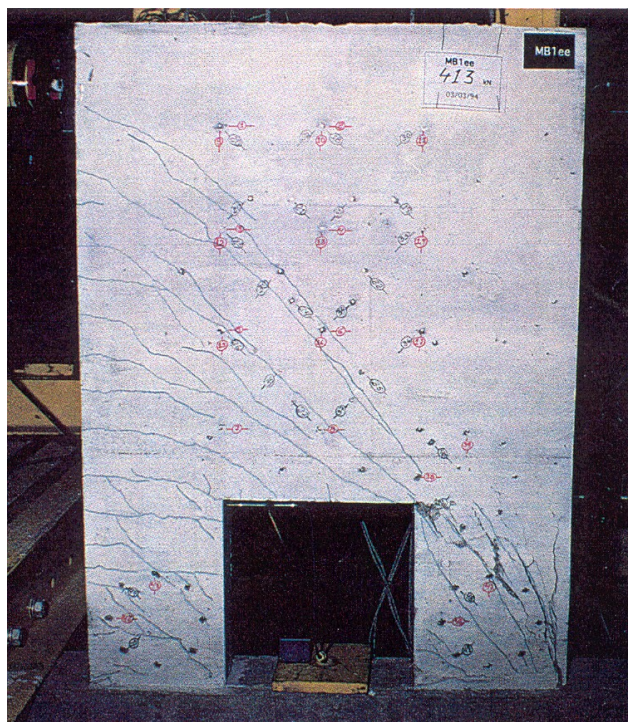


Figura 4.36 – Padrão de fendilhação experimental na rotura (Bounassard Filho 1995).

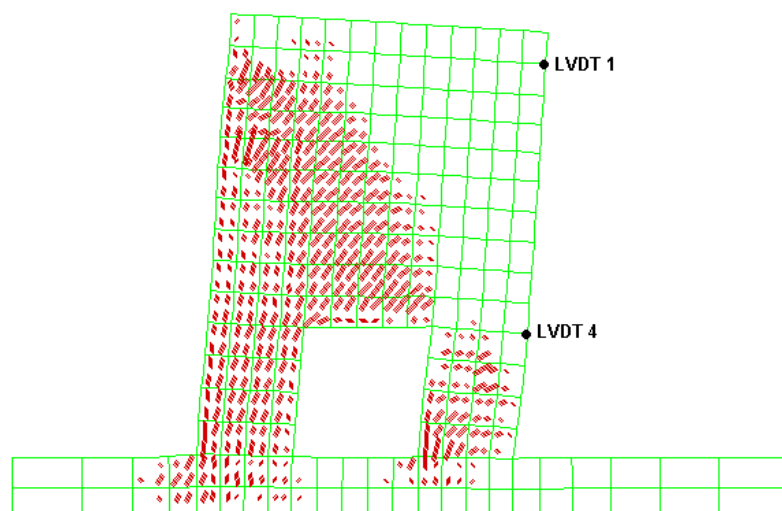


Figura 4.37 – Malha deformada (15x) na rotura. Vectores com a direcção da extensão normal às fendas(12.5x).

O padrão de fendilhação numérico no último incremento de carga convergido está representado na Figura 4.37, sendo de realçar a concordância da sua orientação e localização com o padrão experimental. A rotura numérica dá-se para uma carga de 397 kN por esmagamento do betão no elemento da parede imediatamente à esquerda do pilar. Neste elemento não se considerou qualquer efeito adicional de confinamento, estando o betão em acentuado regime de amolecimento. Na Figura 4.38 está ilustrada a deformada incremental correspondente ao último incremento de carga convergido, com a representação dos mapas das extensões plásticas, sendo evidente a localização da deformação plástica no pilar direito. O efeito da cintagem no aumento

da ductilidade do betão do pilar direito é fundamental para a capacidade resistente da estrutura, permitindo uma eficiente redistribuição das tensões na base no mesmo.

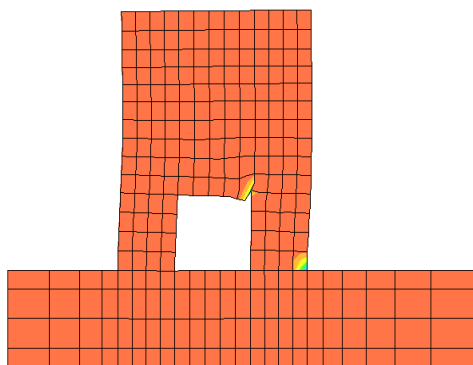


Figura 4.38 – Deformada incremental(750x) correspondente ao último incremento convergido. Mapa com as extensões plásticas principais mínimas.

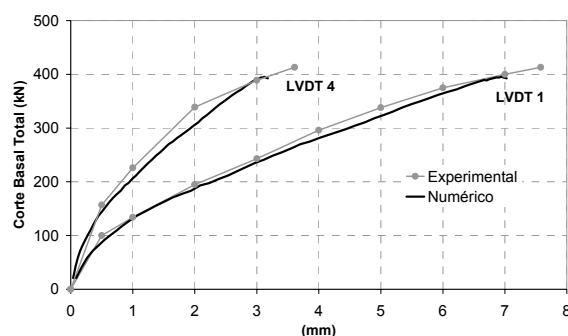


Figura 4.39 – Curvas carga/deslocamento. Localização dos LVDT's indicada na Figura 4.37.

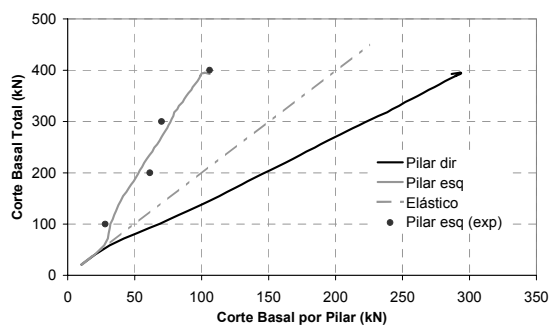


Figura 4.40 – Evolução do corte basal em cada um dos pilares com a carga total.

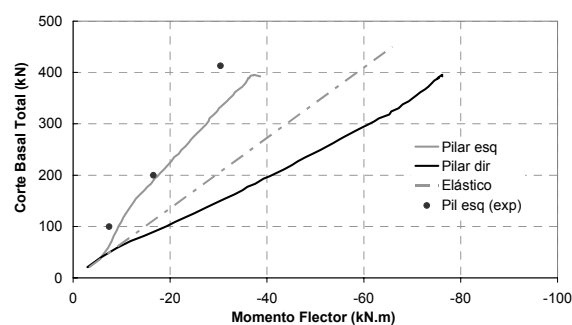


Figura 4.41 – Evolução dos momentos flectores na base dos pilares com a carga total.

A rigidez da parede é captada de forma excelente conforme atesta o gráfico representado na Figura 4.39. Na Figura 4.40 está ilustrada a evolução do corte basal em cada um dos pilares, sendo evidente a sua assimetria logo desde a ocorrência da primeira fendilhação. Os valores obtidos confirmam os obtidos por (Bounassard Filho 1995) através da interpretação das extensões medidas experimentalmente, obtendo-se na rotura uma distribuição 26% e 74% para o pilares esquerdo e direito, respectivamente. Algo de muito semelhante é obtido em relação ao momento flector na base dos pilares. Tal como o corte basal, a distribuição obtida afasta-se da prevista no dimensionamento (elástico) e está ilustrada na Figura 4.41.

Na Figura 4.42 mostram-se as tensões principais de compressão no último incremento convergido, sobre o qual se construiu um modelo de escoras e tirantes, posicionados no baricentro da distribuição de armaduras respectiva, que possibilita a interpretação do esquema de equilíbrio efectivamente mobilizado. O modelo representado é 3 vezes hiperestático necessitando da imposição de uma força no tirante horizontal que transmite parte do corte basal ao pilar esquerdo e da introdução das forças nos tirantes verticais dos pilares. Estas forças foram obtidas a partir dos resultados numéricos.

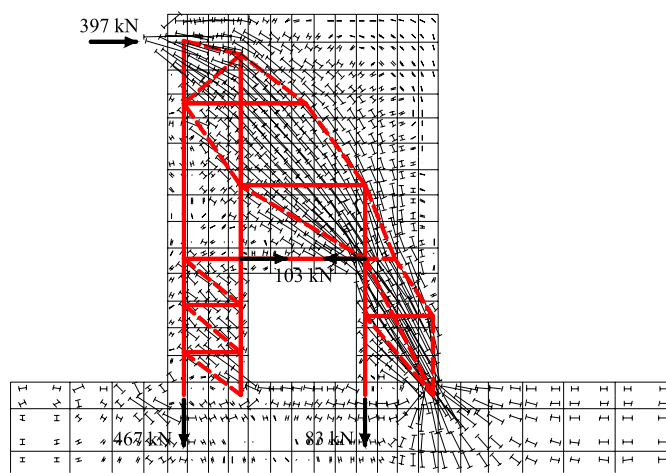


Figura 4.42 – Tensões principais de compressão. Representação de um modelo de escoras e tirantes.

Em jeito de conclusão pode-se dizer que os resultados obtidos foram muito satisfatórios, tendo sido obtida uma estimativa muito próxima da carga e do modo de rotura. O comportamento deformacional foi devidamente reproduzido. Com auxílio do modelo numérico, o funcionamento da estrutura foi interpretado, nomeadamente no que diz respeito à distribuição interna dos esforços pelos dois pilares, tendo-se verificado um afastamento significativo dos pressupostos de cálculo. Na verdade, efectuando uma análise com o betão considerado no dimensionamento, e não contabilizando o efeito das apertadas cintas colocadas no pilar direito, a rotura do modelo dá-se para uma carga $P=325$ kN, inferior à carga de cálculo, o que realça os cuidados a ter no dimensionamento deste tipo de estruturas com base em modelos elásticos.

Foi ainda efectuada a modelação da parede recorrendo ao modelo Rankine/Drucker-Prager, tendo sido obtidos resultados similares, em termos de padrão de fendilhação e modo de ruína, mas a carga última obtida de 443 kN é superior à experimental. No entanto este modelo revelou-se mais robusto na fase de rotura, tendo sido obtidos mais resultados convergidos após a carga máxima (Figura 4.43 e Figura 4.44), permitindo observar maiores redistribuições de tensões nas regiões plastificadas.

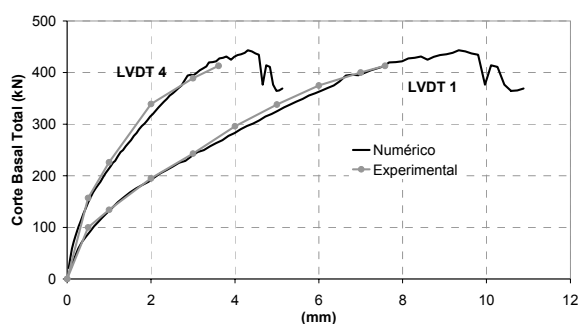


Figura 4.43 – Modelo Rankine/Drucker-Prager. Curvas carga/deslocamento.

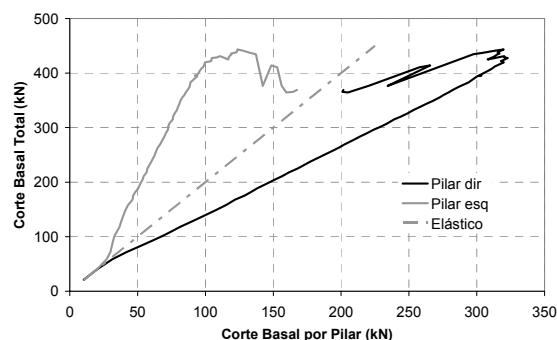


Figura 4.44 – Modelo Rankine/Drucker-Prager. Evolução do corte basal em cada um dos pilares.

4.2.3 – Análise de vigas parede com apoios indirectos

4.2.3.1 – Formulação do problema

As vigas-parede correspondem a um tipo estrutural muito corrente em engenharia civil, onde os esforços de corte adquirem uma maior importância na verificação da segurança à rotura. Com vista à aplicação de modelos numéricos na análise de vigas-parede pertencentes a reservatórios rectangulares de grandes dimensões (Capítulo 5), procurou-se avaliar o desempenho dos modelos computacionais quando aplicados a estruturas idênticas com possibilidade de serem testadas em laboratório. Foram assim analisadas três modelos de vigas-parede a escala reduzida, construídos e testados em laboratório (dois dos quais no âmbito da presente dissertação), dois apenas com armadura ordinária, outro em que parte da armadura do tirante principal foi substituída por pré-esforço não aderente. O dimensionamento dos modelos experimentais foi feito de forma a combinar da forma mais eficiente a capacidade do sistema de aplicação de carga disponível, a quantidade e disposição de armadura dos tirantes principais e a resistência do betão, para que a possibilidade de rotura por corte/compressão da escora principal ou por tracção do tirante estivessem próximas. Desta maneira foi posto à prova de forma mais vinculada a capacidade do modelo numérico na simulação das roturas localizadas com dissipação de energia por corte/compressão.

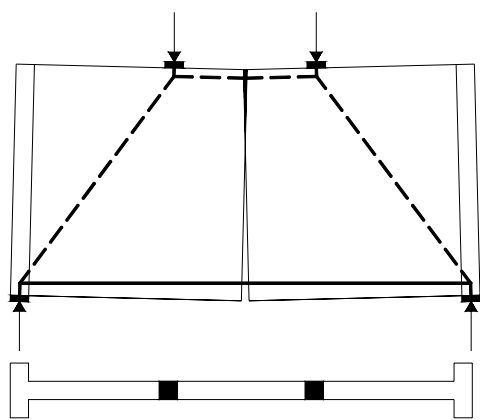


Figura 4.45 – Mecanismo de rotura por flexão

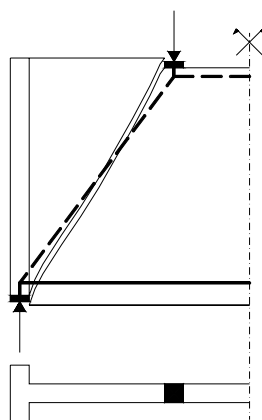


Figura 4.46 – Mecanismo de rotura por corte



Figura 4.47- Efeito de apoio indirecto

No caso de vigas-parede, dois mecanismos possíveis de rotura estão representados na Figura 4.45 e na Figura 4.46. O mecanismo representado na Figura 4.45 está associado a uma rotura por flexão, caracterizada pela cedência das armaduras e posterior esmagamento do betão. A mobilização do esquema de equilíbrio proposto pelo modelo de escoras e tirantes parece evidente. O mesmo não se passa com o mecanismo representado na Figura 4.46. Este mecanismo está associado a uma rotura por corte, obrigando a que, na configuração de equilíbrio limite, a escora atravessasse a fenda representada. Isto só será possível se a transição entre estados de equilíbrio sucessivos desde o estado não fendilhado até ao estado de equilíbrio

limite idealizado no modelo de escoras e tirantes não for impedida pela existência duma fenda de corte demasiado aberta. Por outras palavras, a estrutura pode não ter ductilidade suficiente que lhe permita mobilizar o esquema de equilíbrio proposto. Para obviar este problema, os regulamentos em geral preconizam a colocação de uma malha de armadura distribuída ao longo da altura da viga que tem por função distribuir a fendilhação, evitando a formação de uma banda fendilhada dominante onde se localizam as distorções e por onde ocorre o escorregamento que origina a rotura de corte.

A existência de apoios indirectos coloca problemas adicionais à verificação de segurança. O fluxo de tensões através da fronteira entre duas zonas da estrutura com diferente rigidez faz com que a transmissão das tensões da escora comprimida para o apoio se processe através de um mecanismo de corte/compressão, conforme esquematizado na *Figura 4.47*, que pode aumentar o carácter frágil da rotura. Sob este aspecto o papel da armadura passiva merece ser discutido. Para que as forças por ela desenvolvidas sejam significativas, e para taxas de armadura correntes, as extensões terão de ser da ordem da extensão de cedência do aço. Poderá ocorrer que, para extensões dessa magnitude, a integridade do betão na região próxima do apoio seja tal que o mecanismo representado na *Figura 4.46* esteja formado e consequentemente a rotura seja antecipada. Uma das formas de obviar esta situação poderá ser o uso de armadura activa, sob a forma de pré-esforço não aderente. A substituição de parte da armadura passiva por pré-esforço possibilita que a força do tirante seja mobilizada para deformações mais pequenas, atrasando a formação do mecanismo de corte e tornando possível a mobilização do modelo de equilíbrio idealizado.

4.2.3.2 – Modelo nº1

Este modelo foi dimensionado, construído e testado no âmbito de um trabalho de licenciatura por (Moreira e Castro 2002). A geometria e as armaduras estão representadas na *Figura 4.48* e *Figura 4.49*. O tirante principal é constituído por 10 ϕ 6 e está distribuído ao longo de 30 cm, podendo ser considerado localizado a 15 cm da base para fins de equilíbrio. Foi disposta ainda uma malha aproximadamente quadrada de varões lisos de 4 mm de um aço muito macio (ver *Tabela 4.4*). Deste ensaio apenas se irão apresentar as figuras correspondentes ao modo de rotura e o valor da carga de colapso, dado que os diagramas carga/deslocamento foram afectados por deficientes condições de apoio fornecidas à parede. Com efeito, um dos apoios foi materializado com um rolete metálico e o apoio oposto por uma barra prismática de aço (*Figura 4.48*). O atrito entre esta barra e as superfícies com que contacta é suficiente para materializar uma reacção horizontal que é equilibrada pelo sistema actuadores/pórtico de reacção, levando à imposição de condições fronteira assimétricas e difíceis de quantificar. Por outro lado este ensaio serviu de teste ao sistema de aplicação de carga, pelo que também não foi possível garantir que ambos os actuadores exercessem a mesma força em cada instante.

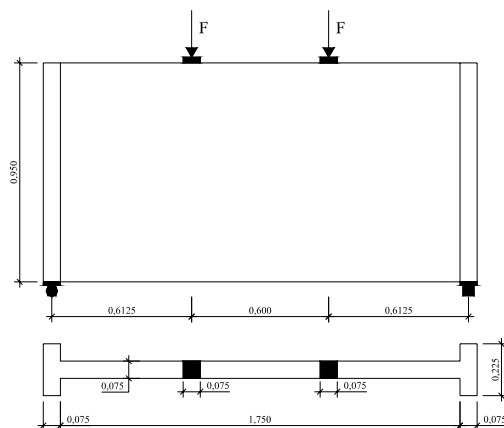


Figura 4.48 – Geometria do modelo

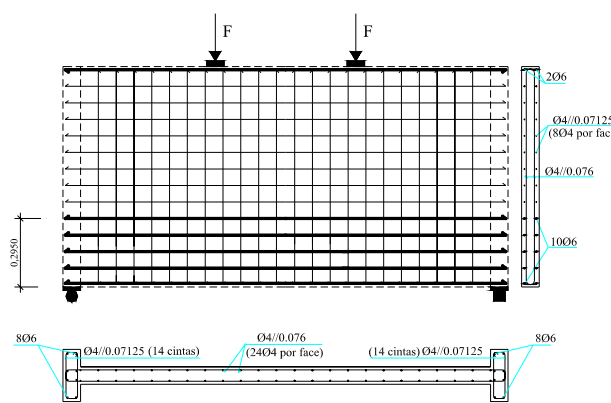


Figura 4.49 – Armaduras

Todas as vigas-parede estudadas foram discretizadas em elementos planos quadráticos de 8 nós com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss), usando condições de simetria a meio vão. A carga foi aplicada com controlo de deslocamentos. Nos elementos onde está embebida a armadura do tirante principal foi adoptado o diagrama de retenção de tensões no betão e nos outros um diagrama de amolecimento linear de acordo com a energia de fractura indicada. A armadura foi modelada de forma discreta através de elementos de barra embebidos nos elementos de betão. Apenas são apresentados os resultados referentes ao modelo “Multifix”.

As características usadas para os materiais do modelo nº1 estão indicadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO		
	$f_{cm} = 33 \text{ MPa}$	$f_t = 2.6 \text{ MPa (*)}$
	$G_f = 100 \text{ N/m (*)}$	$G_c = 12500 \text{ N/m (*)}$
AÇO		
$\phi 6$	$f_{sy} = 530 \text{ MPa}$	$f_{su} = 610 \text{ MPa}$
$\phi 4$	$f_{sy} = 180 \text{ MPa}$	$f_{su} = 292 \text{ MPa}$
Os valores assinalados com (*) foram estimados		

No ensaio, a rotura deu-se por corte/compressão, após a entrada em cedência do tirante. Na Figura 4.50 está ilustrado o padrão de fendas experimental após a rotura e na Figura 4.51 apresenta-se um pormenor do esmagamento do betão na extremidade da fenda de corte. O mecanismo de rotura identifica-se com o representado na Figura 4.46.



Figura 4.50 – Padrão experimental de fendas na rotura.



Figura 4.51 – Pormenor do esmagamento do betão na extremidade da fenda de corte.

O padrão de fendilhação do modelo numérico na rotura (Figura 4.52) é algo difuso na zona do tirante devido ao conceito de “*tension stiffening*”, sendo no entanto perceptível alguma localização na região da parede onde foi adoptado o diagrama de “*tension softening*” (todos os elementos situados a partir dos 33 cm de altura a partir da base). A concordância com o padrão experimental é razoável. Na Figura 4.52 pode observar-se ainda que todos os pontos de Gauss situados no alinhamento da fenda de corte estão fendilhados, estando a fractura já completamente desenvolvida em todos eles, sendo visível a localização das deformações de corte na zona da fractura (Figura 4.53).

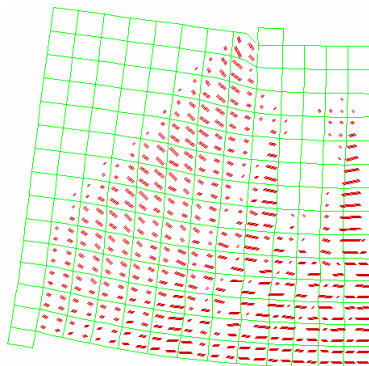


Figura 4.52 - Malha deformada (25x) no último incremento convergido. Vectors com a direcção da extensão normal às fendas(4x).

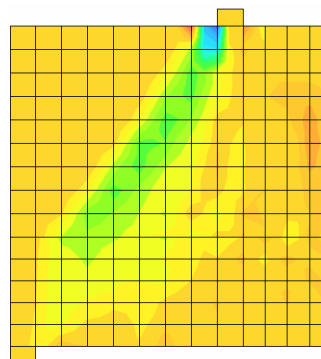


Figura 4.53 - Mapa das distorções γ_{xy} no último incremento convergido. Localização da fenda de corte.

A rotura numérica ocorre com o betão situado à esquerda da placa onde é introduzida a carga em regime de amolecimento, não sendo possível obter posterior equilíbrio, ocorrendo uma divergência do processo iterativo. Deve-se no entanto realçar que a divergência ocorreu após vários incrementos consecutivos com o betão em regime de amolecimento e com consequente diminuição da carga (Figura 4.54). Dado o padrão de fendilhação obtido, com evidente localização das distorções ao longo de uma banda fendilhada diagonal dominante, e com posterior esmagamento do betão na extremidade desta banda, é possível justificar a rotura

numérica por corte/compressão. A máxima tensão de compressão calculada na região do apoio indirecto foi de 19 MPa, cerca de 57% de f_c .

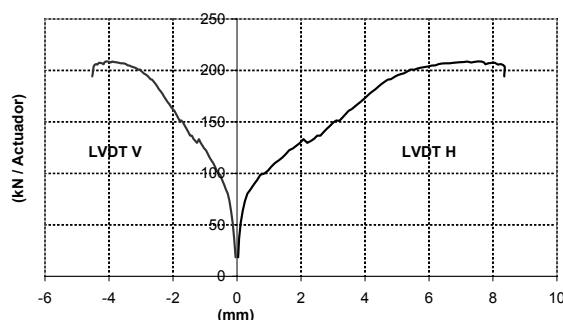


Figura 4.54 – Evolução calculada do deslocamento vertical de um ponto a meio vão (LVDT V) e do afastamento horizontal entre dois pontos 4 cm acima dos apoios (LVDT H).

Na Figura 4.55 representa-se a distribuição de tensões principais no último incremento de carga convergido, com um modelo de escoras e tirantes construído a partir da localização conhecida dos tirantes e com a escora horizontal colocada no baricentro da distribuição numérica de tensões. Visto a rotura se ter dado após cedência das armaduras, as forças representadas são de cálculo imediato, sendo a carga última assim obtida de 193 kN, que concorda de forma razoável com os 210kN da modelação numérica.

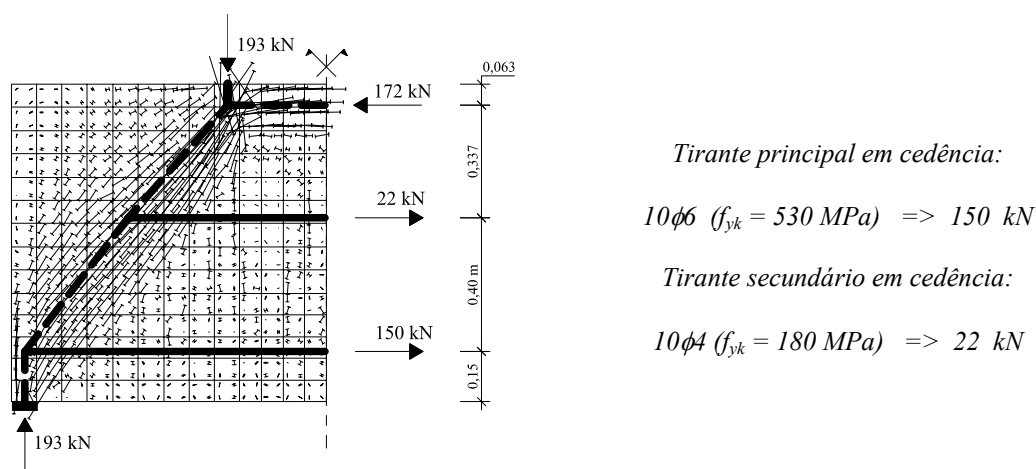


Figura 4.55 - Equilíbrio de forças na cedência com a representação das tensões principais de compressão do modelo numérico.

No ensaio, a rotura deu-se para uma carga de 220 kN no actuador do lado do apoio de roletes, e de 250 kN no outro actuador. Este facto pode ser explicado pela existência de uma reacção horizontal ao nível do apoio direito, que pode ser equilibrada pelo sistema pórtico/actuadores. Na Figura 4.56 representa-se um modelo de escoras e tirantes contemplando estas forças horizontais. Sem pretender efectuar um ajuste das cargas obtidas, verifica-se nestas circunstâncias que a reacção no apoio simples é inferior à carga aplicada no actuador, corroborando os resultados obtidos.

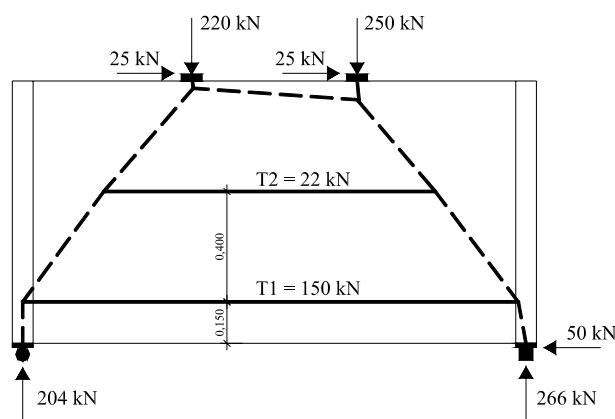


Figura 4.56 – Equilíbrio de forças no caso de mobilização de reacção horizontal no apoio prismático.

4.2.3.3 – Modelo nº2

A geometria do modelo está representada na Figura 4.57. Numa primeira fase o ensaio foi realizado com as armaduras indicadas na Figura 4.58, que são constituídas por um tirante principal com 6 ϕ 6 distribuídos como representado, de forma que o seu baricentro se localize a cerca de 15 cm da base. Foi disposta ainda uma malha aproximadamente quadrada de varões lisos de 4 mm, tal como no modelo anterior. Foram colocados transdutores de deslocamento (LVDT's) para medir o deslocamento vertical de P1 (LVDT V) e o afastamento entre P2 e P3 (LVDT H). Usaram-se ainda extensómetros de embeber no betão (EB1 e EB2) segundo as direcções indicadas na Figura 4.58, e extensómetros colados nas armaduras EC1 e EC2.

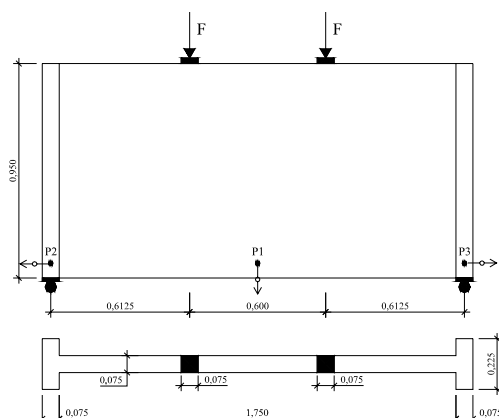


Figura 4.57 – Geometria do modelo e localização dos pontos nos quais se mediram deslocamentos

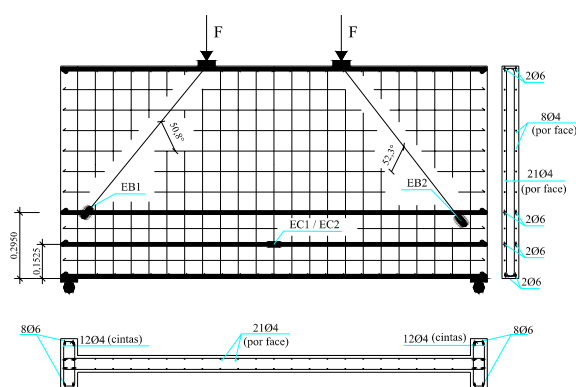


Figura 4.58 – Armaduras passivas e localização dos extensómetros

Após carga até aos 150 kN/actuador e posterior descarga, numa segunda fase do ensaio foi simulado o efeito do pré-esforço não aderente através do tensionamento de dois fios de aço de alta resistência de 5 mm de diâmetro, ancorados a 16 cm da base conforme ilustrado na Figura 4.59 e na Figura 4.60. Na cedência do aço de pré-esforço a força total no tirante principal é semelhante à do modelo nº1. Foram ainda colados dois extensómetros, EC3 e EC4, em cada um

dos fios. Devido ao reduzido comprimento dos fios, a perda por reentrada de cunhas foi significativa, tendo sido medida à hora do ensaio final uma força média de 15.5 kN por fio (correspondentes a uma tensão instalada de cerca de 790 MPa).



Figura 4.59 – Pormenor da aplicação de pré-esforço e da zona das ancoragens.

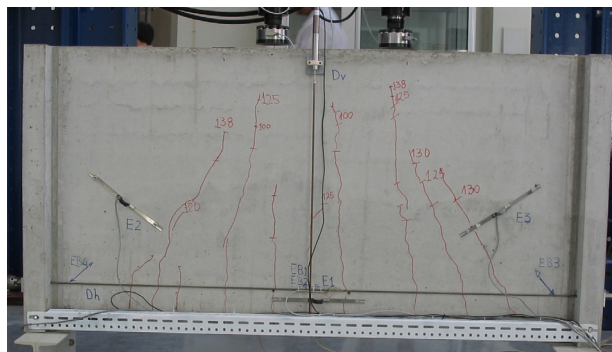


Figura 4.60 – Aspecto geral do modelo com os fios de pré-esforço.

As características usadas para os materiais estão indicadas na *Tabela 4.5*.

Tabela 4.5 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO		
	$f_{cm} = 41 \text{ MPa}$	$f_t = 2.6 \text{ MPa (*)}$
	$G_f = 100 \text{ N/m (*)}$	$G_c = 15000 \text{ N/m (*)}$
AÇO PASSIVO		
$\phi 6$	$f_{sy} = 530 \text{ MPa}$	$f_{su} = 610 \text{ MPa}$
$\phi 4$	$f_{sy} = 180 \text{ MPa}$	$f_{su} = 292 \text{ MPa}$
AÇO DE PRÉ-ESFORÇO		
$\phi 5$	$f_{sy} = 1600 \text{ MPa}$	$f_{su} = 1800 \text{ MPa}$
Os valores assinalados com (*) foram estimados.		

Na primeira fase do ensaio, só com armaduras ordinárias, a parede apresentou um comportamento dúctil, tendo sido carregada até ao início da cedência do tirante e apresentando um padrão regular de fendas verticais (*Figura 4.60*). A análise numérica conseguiu captar correctamente a reposta da parede, conforme se pode ver pelos gráficos da *Figura 4.61* à *Figura 4.66*. O excelente ajuste de todas as curvas na primeira fase do ensaio era expectável dado o comportamento ter sido dominado pela cedência da armadura de flexão.

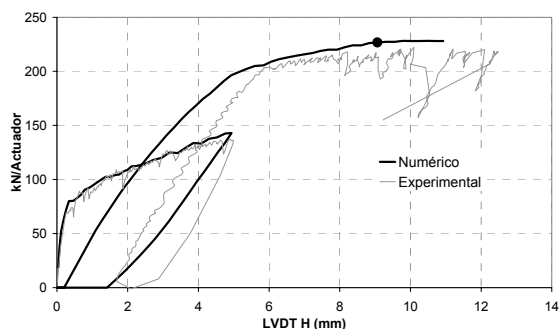


Figura 4.61 - Evolução do afastamento de P2 e P3 (LVDT H).

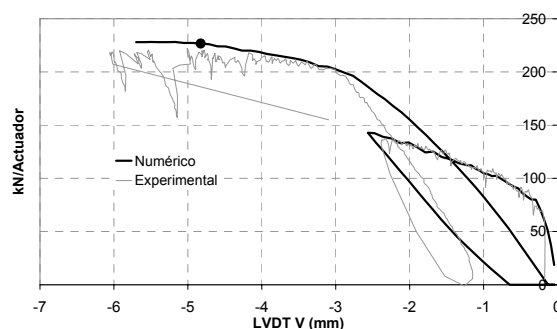


Figura 4.62 - Evolução do deslocamento vertical de P1 (LVDT V).

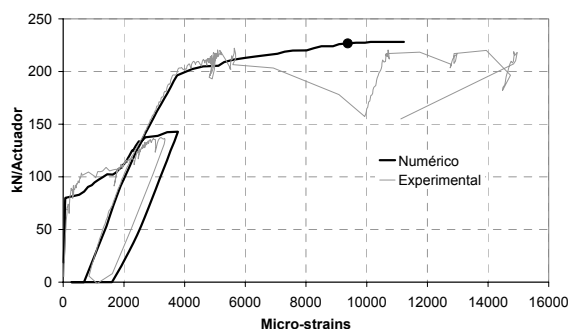


Figura 4.63 - Evolução da extensão em EC1.

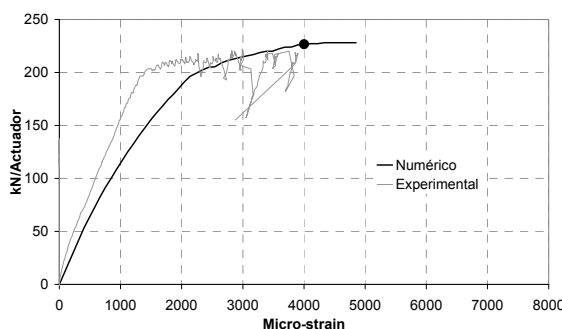


Figura 4.64 - Evolução da extensão em EC3 (fio de pré-esforço).

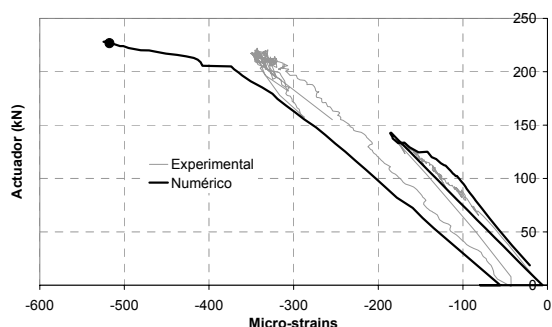


Figura 4.65 - Evolução da extensão em EB1.

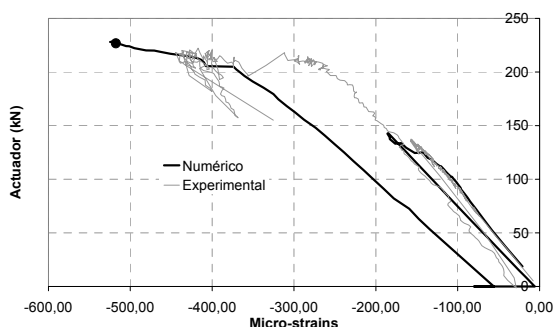


Figura 4.66 - Evolução da extensão em EB2.

Após a aplicação do pré-esforço e durante o segundo ciclo de carga, a parede manteve a rigidez até aos 200 kN/actuador, carga a partir da qual a armadura passiva do tirante voltou a entrar em cedência. A rotura deu-se por flexão, para $F=225$ kN, com estrição visível nos varões de 6mm do tirante, e coincidiu com o início da cedência do aço de pré-esforço, conforme se pode aferir da Figura 4.64. Na análise numérica a rotura é devidamente captada, mas dado que o modelo de fendas utilizado apresenta um comportamento secante durante os ciclos descarga/recarga em tracção, as medições durante a descarga e aplicação do pré-esforço e a rigidez na recarga afastam-se ligeiramente dos valores experimentais. Devido à ductilidade da rotura, no modelo numérico foram obtidos resultados convergidos após a cedência do fio de pré-esforço, não sendo obviamente captada a redução de secção por estrição dos fios de 6 mm que levou à

rotura física da parede. Na curva correspondente aos resultados numéricos está assinalado com um ponto o incremento de carga no qual se deu a cedência do fio de pré-esforço.

As medições efectuadas pelos extensómetros de embeber no betão aproximam-se das previsões numéricas, sendo de realçar nomeadamente o paralelismo das curvas experimental e numérica, o que indicia que a distribuição interna das tensões principais é devidamente reproduzida.

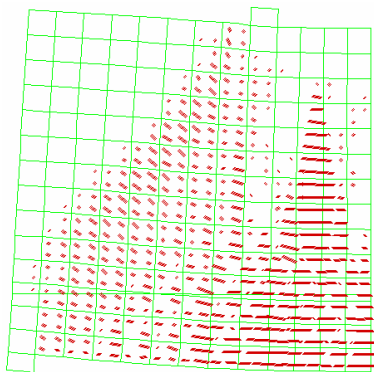


Figura 4.67 – Malha deformada (10x) na cedência do fio de pré-esforço (rotura experimental). Vectores com a direcção da extensão normal às fendas(4x).

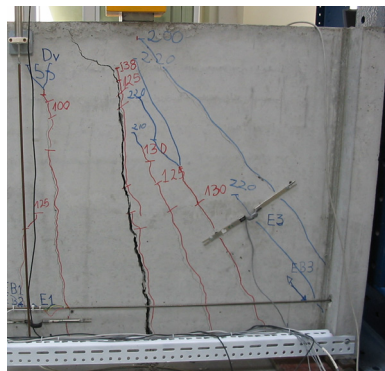
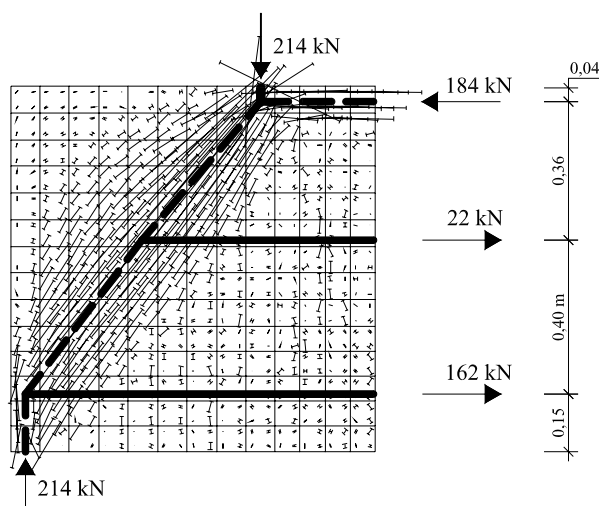


Figura 4.68 – Figura do modelo n.º 2 após a rotura, com marcação do padrão de fendilhação.

Tal como no modelo anterior, o padrão de fendilhação do modelo numérico na rotura (*Figura 4.67*) é algo difuso na zona do tirante, sendo no entanto perceptível a localização da fractura na região da parede onde foi adoptado o diagrama de “*tension softening*” (todos os elementos situados a partir dos 33 cm de altura a partir da base). A concordância com o padrão experimental da *Figura 4.68* é muito satisfatória.

A carga de rotura pode ser explicada pelo modelo de equilíbrio da *Figura 4.69*. Trata-se de um modelo de escoras e tirantes construído a partir da localização conhecida dos tirantes e com a escora horizontal colocada no baricentro da distribuição numérica de tensões. Visto a rotura se ter dado após cedência das armaduras, as forças representadas são de cálculo imediato, sendo a carga última assim obtida de 214 kN, concordando de forma razoável com os 227kN da modelação numérica.



Tirante principal em cedência:

$$\begin{aligned} 6\phi 6 (f_{yk} = 530 \text{ MPa}) &\Rightarrow 89.9 \text{ kN} \\ 4\phi 4 (f_{yk} = 180 \text{ MPa}) &\Rightarrow 9.05 \text{ kN} \\ 2\phi 5 (f_{yk} = 1600 \text{ MPa}) &\Rightarrow 62.8 \text{ kN} \\ &\underline{162 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Tirante secundário em cedência:

$$10\phi 4 (f_{yk} = 180 \text{ MPa}) \Rightarrow 22 \text{ kN}$$

Figura 4.69 – Equilíbrio de forças na cedência com a representação das tensões principais de compressão do modelo numérico.

4.2.3.4 – Modelo nº3

A geometria do modelo é igual à dos anteriores (Figura 4.70), tendo-se modificado a disposição das armaduras conforme ilustrado na Figura 4.71, adoptando-se um tirante localizado a 2.75 cm da base constituído por armaduras concentradas em cerca de 4 cm. A instrumentação interna foi desta feita constituída por dois extensómetros colados no tirante, um a meio vão (EC1) e o outro na zona de apoio (EC2) (Figura 4.71 e Figura 4.72). Externamente, para além dos transdutores já utilizados no modelo anterior, colocaram-se ainda transdutores de deslocamento dispostos em cruz, de forma a medir a distorção média da região da parede com esforços de corte (Figura 4.70 e Figura 4.73).

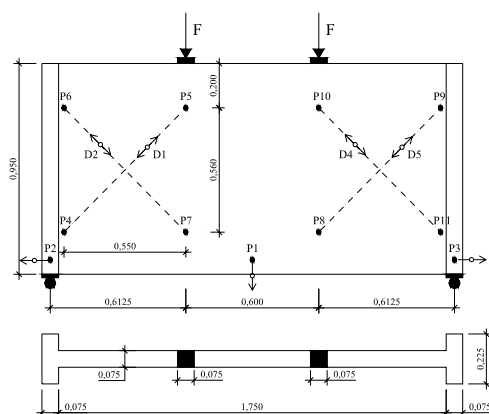


Figura 4.70 - Geometria do modelo e localização dos pontos nos quais se mediram deslocamentos

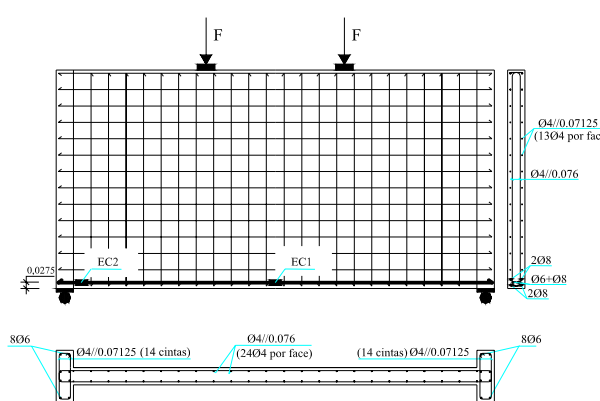


Figura 4.71 - Armaduras e localização dos extensómetros

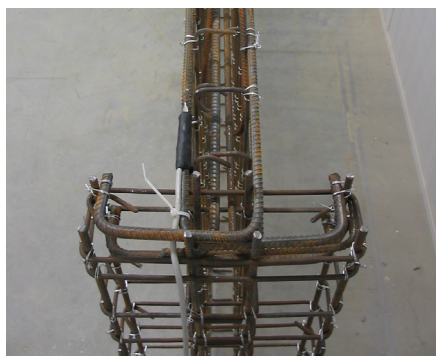


Figura 4.72 – Pormenor das armaduras do tirante principal e do extensómetro EC2.

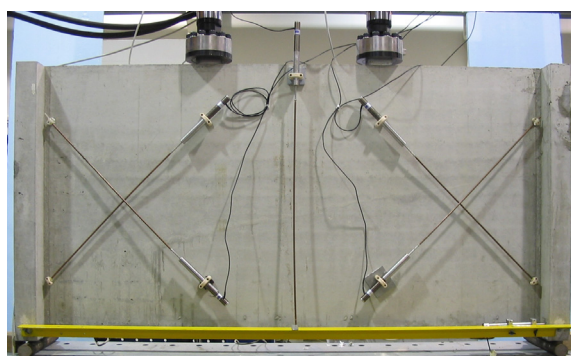


Figura 4.73 – Aspecto geral do modelo n.º 3 com a instrumentação exterior.

As características usadas para os materiais estão indicadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO		
	$f_{cm} = 45 \text{ MPa}$	$f_t = 3.2 \text{ Mpa (*)}$
	$G_f = 100 \text{ N/m (*)}$	$G_c = 15000 \text{ N/m (*)}$
AÇO		
$\phi 8$	$f_{sy} = 530 \text{ Mpa(*)}$	$f_{su} = 610 \text{ Mpa(*)}$
$\phi 6$	$f_{sy} = 530 \text{ MPa}$	$f_{su} = 610 \text{ MPa}$
$\phi 4$	$f_{sy} = 180 \text{ MPa}$	$f_{su} = 292 \text{ MPa}$
Os valores assinalados com (*) foram estimados		

A rotura experimental ocorreu de acordo com o mecanismo de rotura da Figura 4.46, para uma carga $F = 275 \text{ kN}$ /actuador e com as armaduras do tirante principal em cedência, sendo típico de uma rotura por corte/compressão. O padrão de fendilhação imediatamente antes da rotura, com realce das fendas mais activas, está representado na Figura 4.74. A fenda inclinada mais à esquerda foi a última a formar-se, evidenciando desde logo aberturas visíveis a olho nu. O betão na zona de introdução das cargas começou a evidenciar indícios de esmagamento pouco após a cedência das armaduras (Figura 4.76 a)). Aquando da rotura, a acção localizada do tirante provocou a desagregação do betão na zona do apoio, sendo visível na Figura 4.76 b) a delaminação vertical do betão. No modelo experimental n.º1, não foi detectado este último aspecto. Deve-se realçar que a Figura 4.76 b) não indica nenhum tipo de esmagamento de betão, na medida em que a observação da face inferior do apoio revelou uma superfície intacta e sem indícios de esmagamento. Pode então afirmar-se que foi o efeito de apoio indirecto, atrás exposto (Figura 4.47), o responsável pelo aspecto evidenciado pelo betão desta zona.

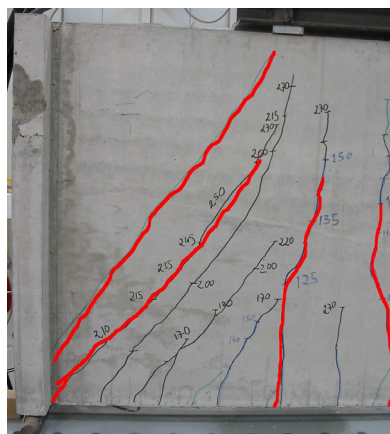


Figura 4.74 – Padrão experimental de fendas para a carga máxima. As fendas mais activas estão realçadas a vermelho.

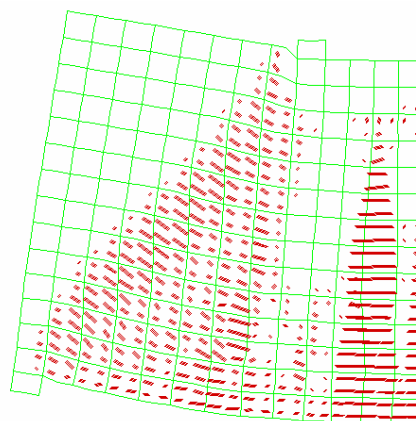


Figura 4.75 – Malha deformada (25x) antes da rotura. Vectores com a direcção da abertura das fendas (4x).

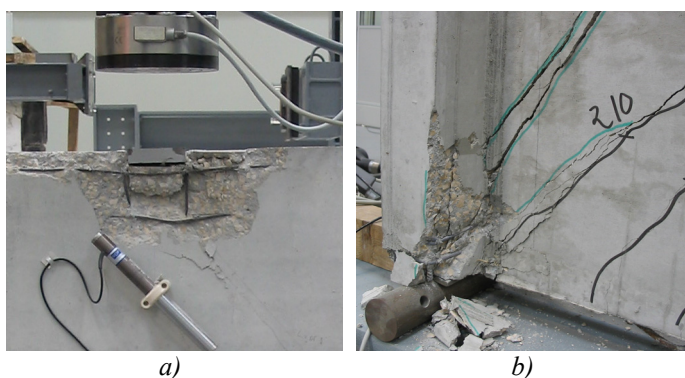


Figura 4.76 - Formação do mecanismo de rotura com:
a) esmagamento do betão na zona de introdução das cargas;
b) efeito de apoio indirecto.

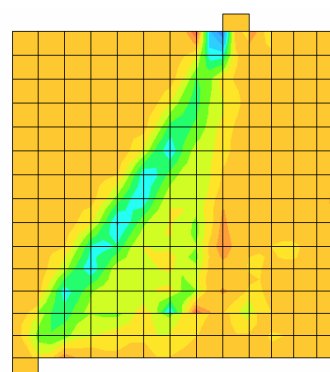


Figura 4.77 - Mapa das distorções γ_{xy} .
Localização da fenda de corte.

Na análise numérica, a rotura deu-se com o esmagamento do betão no alinhamento de pontos de Gauss imediatamente à esquerda do actuador (Figura 4.83), para uma carga $F=260$ kN/actuador. Tal como no modelo nº 1, ocorreu divergência do processo numérico depois de incrementos de carga sucessivos com o betão em regime de amolecimento, e após grandes redistribuições de tensões na zona esmagada, o que está de acordo com as observações experimentais. O padrão de fendilhação numérico imediatamente antes da rotura está representado na Figura 4.75, sendo excelente a sua concordância com o padrão experimental. A localização das distorções é visível na Figura 4.77, sendo lícito afirmar-se que o modo de rotura numérico também corresponde a uma rotura de corte/compressão. A tensão máxima de compressão calculada na região do apoio indirecto foi de 29.1 MPa, cerca de 65% de f_c .

Da análise da Figura 4.78 à Figura 4.82 constata-se uma aproximação muito satisfatória de todos os parâmetros medidos, sendo de realçar que não foi feita nenhuma tentativa no sentido de ajustar as curvas numéricas às experimentais. O ajuste menos conseguido dá-se nas leituras do deslocamento $D2$, prevendo o modelo numérico uma maior actividade das fendas inclinadas, patenteada pela menor inclinação da curva numérica na Figura 4.82. Após a cedência das

armaduras, as leituras efectuadas pelos extensómetros de colar EC1 e EC2 devem ser comparadas com as calculadas com alguma cautela, na medida em que os valores experimentais podem reflectir fenómenos localizados. Para a ductilidade evidenciada na resposta numérica muito contribui o facto de o diagrama de amolecimento do betão comprimido ser definido com um patamar horizontal após $0.2f_c$, podendo ser discutível até que ponto a redistribuição de tensões que ocorre em consequência ainda tem significado físico.

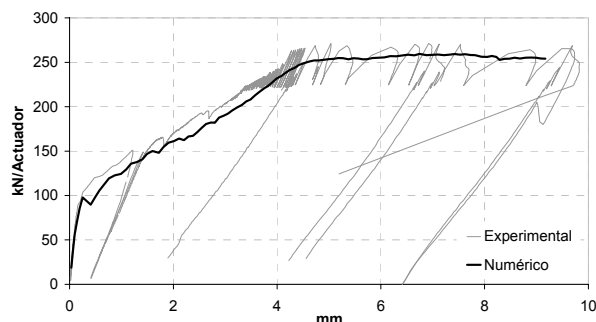


Figura 4.78 - Evolução do afastamento dos pontos P2 e P3 (Lvdt H).

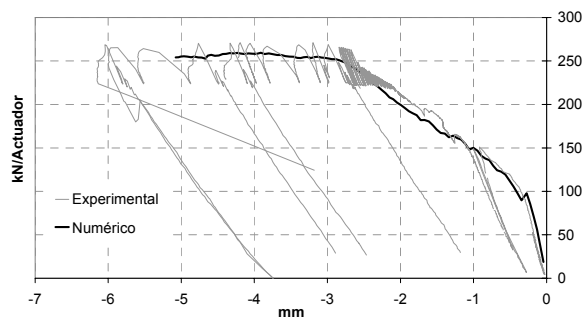


Figura 4.79 - Evolução do deslocamento vertical do ponto P1 (Lvdt V).

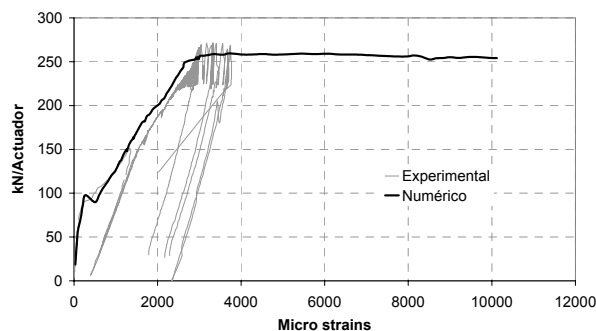


Figura 4.80 - Evolução da extensão em EC1 (meio vão).

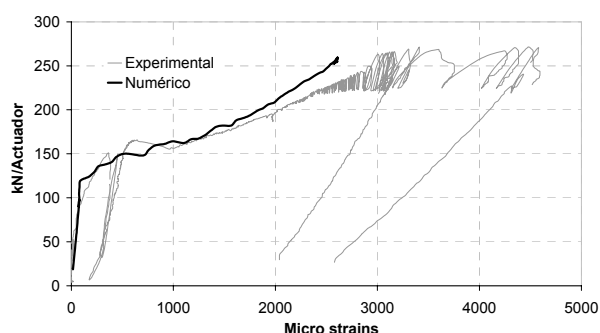


Figura 4.81 - Evolução da extensão em EC2 (apoio).

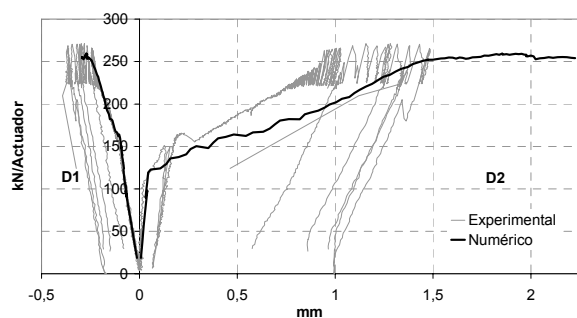


Figura 4.82 - Evolução dos deslocamentos D1 e D2.

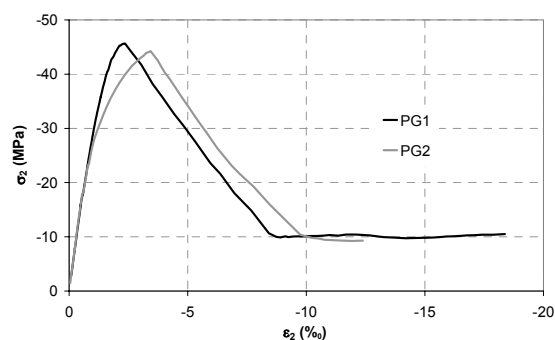
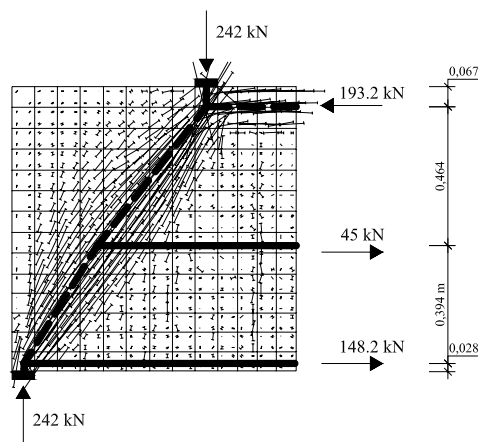


Figura 4.83 - Evolução da tensão e extensão principal mínima em dois pontos de Gauss imediatamente à esquerda do actuador.

A carga de rotura pode ser satisfatoriamente aproximada pelo modelo de equilíbrio da Figura 4.84, onde também se ilustram as tensões principais de compressão imediatamente antes da

rotura. Os tirantes estão posicionados no baricentro das forças desenvolvidas na cedência das armaduras respectivas e a escora horizontal na resultante das tensões no modelo numérico.



Tirante principal em cedência:

$$5\phi 8 \ (f_{yk} = 530 \text{ MPa}) \Rightarrow 133.2 \text{ kN}$$

$$\phi 6 \ (f_{yk} = 530 \text{ MPa}) \Rightarrow \frac{15.0 \text{ kN}}{148.2 \text{ kN}}$$

Tirante secundário em cedência:

$$20\phi 4 \ (f_{yk} = 180 \text{ MPa}) \Rightarrow 45.2 \text{ kN}$$

Figura 4.84 – Equilíbrio de forças na cedência com a representação das tensões principais de compressão do modelo numérico.

4.2.3.5 – Extrapolação para a escala real. Efeito de escala.

Para efectuar a análise numérica de estruturas reais é essencial avaliar a capacidade dos modelos na reprodução do efeito de escala associado às roturas por corte, originado pela dissipação de energia numa banda fendilhada localizada. Para o efeito vai ser analisada uma viga-parede com dimensões parecidas às do exemplo a ser tratado no Capítulo 5, obtidas do modelo laboratorial através de um factor de escala $s_f = 8.42$ (Figura 4.85).

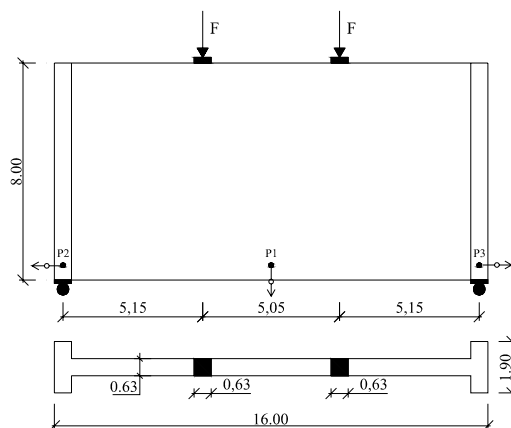


Figura 4.85 – Dimensões do modelo à escala real.

A importância deste aspecto é realçada pelo facto de a armadura de alma, que a generalidade dos códigos preconiza com a função de disseminar a fissuração, ser inferior à percentagem mínima de armadura ρ_{MIN} , pois no caso de vigas parede, as fissuras na alma estão controladas abaixo pelo tirante principal e acima pelo betão comprimido. Desta forma, é demasiado conservativo admitir um estado de tracção simples ao longo de toda fissura. Nestas circunstâncias a armadura a dispor deveria ser função da dimensão da estrutura, tendendo para

ρ_{MIN} com o aumento do seu tamanho, já que numa estrutura de maiores dimensões, o controlo da abertura das fendas pelo tirante e pelo betão comprimido é menos efectivo, dada a maior extensão da zona fracturada. Os efeitos de escala não são assim eliminados, pelo que se torna necessário incluir conceitos da mecânica da fractura na análise e dimensionamento deste tipo de estruturas, com vista a prever possíveis roturas frágeis em estruturas de maiores dimensões.

Na versão mais recente do Eurocódigo 2 (CEN 2002), a percentagem de armadura de alma mínima proposta é de $0.001A_c/\text{face}$, nunca inferior a $150 \text{ mm}^2/\text{m}/\text{face}$. Tomando como exemplo o modelo experimental nº3, a armadura de alma colocada corresponde a cerca de $0.0023A_c/\text{face}$ ($173 \text{ mm}^2/\text{face}$). Em aço A400, a força desenvolvida pela armadura de alma seria obtida precisamente com os $0.001A_c/\text{face}$. Conforme se constatou, o modelo assim dimensionado atingiu a carga de projecto, na medida em que a rotura se deu com as armaduras em cedência. No modelo à escala real, de forma a manter as tensões nas escoras, a força F deve vir multiplicada por s_f^2 . Facilmente se conclui que a área total de armadura, colocada nas mesmas posições relativas, deve vir também multiplicada por s_f^2 . Adoptou-se assim uma armadura de alma, no mesmo aço macio da do modelo experimental, com uma área de $1450 \text{ mm}^2/\text{m}/\text{face}$ a que correspondem os mesmos $0.0023A_c/\text{face}$ do modelo experimental (equivalentes a $0.001A_c/\text{face}$, ou $650 \text{ mm}^2/\text{m}/\text{face}$, em aço A400). O tirante principal é desta feita constituído por 198 cm^2 de armadura disposta ao longo de 46 cm de altura. Todas as características dos materiais foram mantidas.

Como parâmetro independente da dimensão que permite comparar resultados entre estruturas geometricamente semelhantes, mas com escalas diferentes, utilizou-se a tensão média de corte dada por (4.26), onde F é a carga por actuador, b é a espessura e h a altura da viga.

$$\tau_{med} = \frac{F}{bh} \quad (4.26)$$

O modo de rotura calculado tem características em tudo semelhantes às do modelo reduzido, com a importante ressalva de a rotura por corte/compressão ter ocorrido com a armadura do tirante ainda em regime elástico, exibindo portanto um carácter frágil. A tensão média de corte última é cerca de 25% inferior à obtida no modelo reduzido. O padrão de fendilhação está representado na *Figura 4.86*, e a localização das distorções γ_{xy} na *Figura 4.87*. Nos gráficos da *Figura 4.88* e da *Figura 4.89* estão ilustrados alguns resultados comparativos entre os dois modelos, onde se evidencia o efeito de escala.

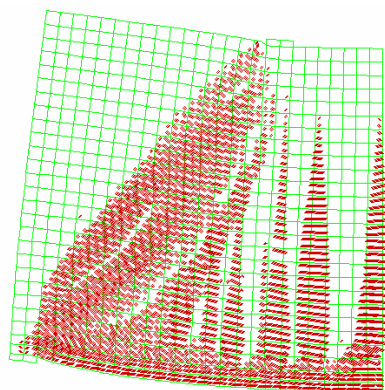


Figura 4.86 – Malha deformada (50x) antes da rotura. Vectors com a direcção da abertura das fendas (75x).

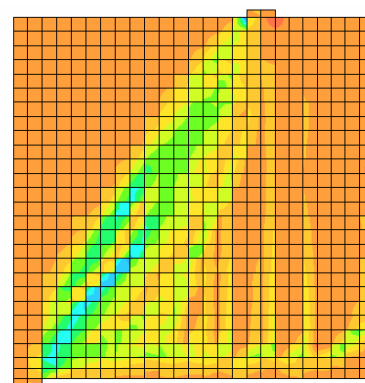


Figura 4.87 – Mapa das distorções γ_{xy} . Localização da fenda de corte.

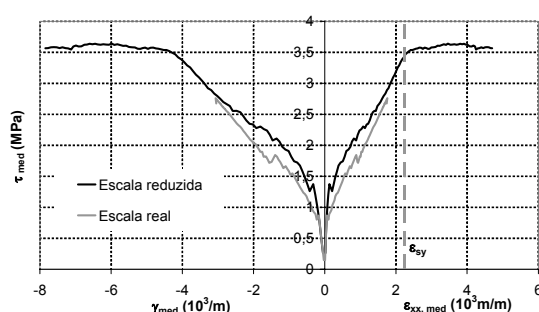


Figura 4.88 – Tensão média de corte v.s distorção média no vão de corte/extensão média do tirante.

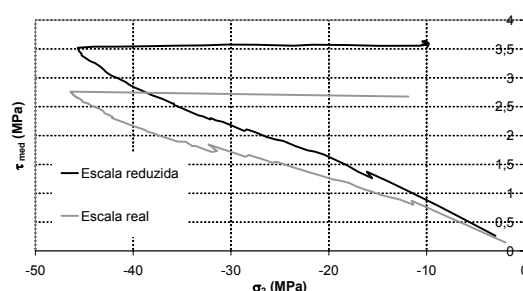


Figura 4.89 - Tensão média de corte v.s tensão principal de compressão à esquerda do actuador.

4.3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos três modelos disponíveis, apenas o modelo “Multifix”, com possibilidade de formação de fendas não ortogonais, baseado num modelo de fendas distribuídas com decomposição das extensões associado a um modelo elasto-plástico para a compressão, se revelou suficientemente versátil para poder ser utilizado em todos os exemplos estudados. Desta forma foi este o modelo escolhido para a aplicação prática do Capítulo 5. As formulações baseadas em extensões totais revelaram ser as mais eficazes no que diz respeito ao esforço de cálculo necessário, requerendo sempre muito menos tempo de cálculo do que as restantes e revelando menos dificuldades de convergência. A implementação de um modelo de fendas não ortogonais, semelhante ao já referido em 3.2.3.1, assim como um tratamento mais consistente do efeito de Poisson, permitiria a este tipo de formulação o compromisso mais eficaz entre a robustez, a rapidez, o rigor e a versatilidade, de todos os modelos experimentados.

Na análise da viga sem estribos, a rotura por corte sem esmagamento do betão revelou-se de análise complexa, dada a fragilidade da rotura. Os incrementos de carga tiveram de ser tomados muito pequenos para que a convergência fosse garantida. A interpretação deste tipo de roturas não está estabelecida de forma satisfatória, pelo que é imperiosa a necessidade de captar quedas

convergadas no diagrama carga/deslocamento. No caso da viga com estribos mínimos, a presença destes aumenta significativamente a ductilidade da rotura, ocorrendo agora esta com esmagamento do betão, o que constitui um indicador precioso para a sua detecção. O processo de convergência revelou-se mais moroso na análise com o modelo “*Multifix*” com $\alpha=30^\circ$, devido à complexidade do padrão de fendilhação, podendo, apesar de tudo, ser considerada muito satisfatória a resposta do modelo numérico. Com a análise destas vigas pretendeu-se essencialmente testar a adequabilidade do modelo de fractura com uma diagrama de amolecimento linear, avaliar a influência do parâmetro que define o ângulo mínimo (α) entre duas fissuras no mesmo ponto de integração, para além de testar a robustez dos algoritmos em casos muito exigentes. Pôde-se concluir que, apesar de grosseiro, o diagrama de amolecimento linear revelou ser satisfatório. A influência do parâmetro α foi decisiva, podendo ser generalizada a todas as vigas com relações vão de corte/altura útil semelhante, e tendo-se concluído que um valor de $\alpha=30^\circ$ representa um bom compromisso entre a estabilidade do algoritmo e o rigor necessário. Na viga sem estribos a adopção de um valor de α superior conduziu invariavelmente a uma rotura com as armaduras em cedência, contrária à verificada experimentalmente. Na viga com estribos mínimos, o valor de α não foi determinante para o cálculo da carga máxima, dado que a rotura se materializou com o esmagamento do betão, mas foi importante para a correcta reprodução do padrão de fendas e da curva carga/deslocamento. A utilização do modelo de fendas rotativas e do modelo elasto-plástico em tracção e compressão na análise destes problemas revelou ser desadequada.

No caso da parede com aberturas, pretendeu-se discutir a utilidade dos modelos de análise não linear na clarificação do funcionamento estrutural de uma estrutura laminar, alertando para um caso onde a aplicação de modelos de escoras e tirantes baseados na distribuição elástica de tensões deve ser acautelada. Este exemplo serviu ainda para comprovar a adequabilidade do diagrama de retenção de tensões de tracção adoptado, na medida em que a parede contém armadura superior à mínima em toda a sua extensão e a resposta deformacional obtida foi excelente. A modelação efectuada contribuiu para visualizar o modelo de equilíbrio na rotura e comprovar o seu afastamento dos pressupostos de dimensionamento, facto que, conforme se viu neste caso, pode ser contra a segurança.

Para validar o modelo numérico seleccionado na modelação do comportamento de vigas parede com apoios indirectos foram construídas e testadas em laboratório três modelos de vigas-parede (duas das quais no âmbito da presente dissertação). Dos modos de rotura possíveis, o modo de rotura por corte coloca grandes exigências ao nível da reprodução da transferência de tensões de corte entre fendas, obrigando o campo de tensões a atravessar a fenda de corte, pelo que se tentou perceber até que ponto o modelo numérico seria capaz de reproduzir satisfatoriamente este aspecto. O modelo seleccionado conseguiu captar razoavelmente o modo e a carga de rotura observados, assim como o comportamento deformacional de todos os modelos ensaiados.

As características de convergência foram boas. A utilização de conceitos da mecânica da fractura não linear revelou-se da maior utilidade na reprodução de ensaios experimentais em modelo reduzido e na previsão do comportamento de um modelo de grandes dimensões de uma forma coerente e unificada. No entanto, alguns aspectos específicos do modelo utilizado merecem ainda alguma atenção adicional.

O processo de identificação das roturas por corte/compressão numéricas baseou-se na observação do padrão de fendilhação, na localização das distorções ao longo da fenda de corte e na constatação do regime de amolecimento do betão imediatamente à esquerda do actuador associada a uma ligeira descida da carga aplicada. Este último aspecto pode levantar algumas objecções, na medida em que a redistribuição de tensões na zona de esmagamento é responsável pela ductilidade exibida pelos modelos nº1 e nº3, e é, em larga medida, dependente do ramo de amolecimento considerado para a relação uniaxial σ_c - ε_c , com todas as reservas que se lhe podem apontar. Uma lei constitutiva mais realista para o comportamento do betão comprimido, poderia trazer algum refinamento às soluções obtidas, embora no essencial se possa considerar que os resultados apresentados são muito satisfatórios.

Seria também interessante avaliar até que ponto os resultados são influenciados pela consideração de uma lei mais sofisticada para o coeficiente de redução da rigidez de corte do betão após o desenvolvimento completo da fractura, baseado na mecânica do “agregate interlock”. A consideração deste último aspecto poderia trazer algum ganho no que diz respeito à modelação da influência da armadura activa e do efeito da distribuição do tirante principal por uma altura superior. Análises paramétricas sobre o modelo nº3, fazendo variar o coeficiente de redução da rigidez de corte β , revelaram que o modo de rotura se mantém, aumentando ligeiramente a ductilidade da rotura com o aumento no valor de β . Por fim, apesar de terem sido detectadas fissuras aproximadamente verticais na zona do apoio indirecto do modelo nº3, a degradação do betão observada no ensaio experimental só poderá ser modelada eventualmente com a utilização de uma fenda discreta na zona de descontinuidade geométrica ou com uma modelação tridimensional desta zona.

Da comparação dos resultados obtidos, e pese embora a utilização de betões algo diferenciados, o modelo experimental nº2, com parte do tirante principal realizado por armadura activa não aderente, revelou um modo de rotura diferenciado dos demais. Pode assim ser avançado que o pré-esforço representa uma contribuição positiva para atrasar o efeito do corte na rotura da escora comprimida, que corresponde a uma rotura potencialmente frágil em vigas-parede com apoios indirectos.

CAPÍTULO 5

CASO PRÁTICO: ETAR DE SOBREIRAS

5 - CASO PRÁTICO: ETAR DE SOBREIRAS

No estudo que a seguir se apresenta ilustra-se a aplicação do modelo “Multifix” na análise de uma estrutura laminar complexa, no caso concreto das vigas-parede e respectivas zonas de apoio, do nível superior de reservatórios do Corpo A da Estação de Tratamento de Águas Residuais (ETAR) de Sobreiras, Porto. A análise não linear efectuada enquadra-se dentro da quarta etapa da metodologia geral de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão descrita no Capítulo 1, pretendendo verificar e validar o dimensionamento previamente efectuado.

5.1 – DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

A ETAR de Sobreiras é uma estrutura compacta, parcialmente enterrada, com os principais órgãos instalados em edifícios de vários pisos. Está inserida numa zona verde, sendo inclusivamente a cobertura dos vários corpos ajardinada (*Figura 5.1*).

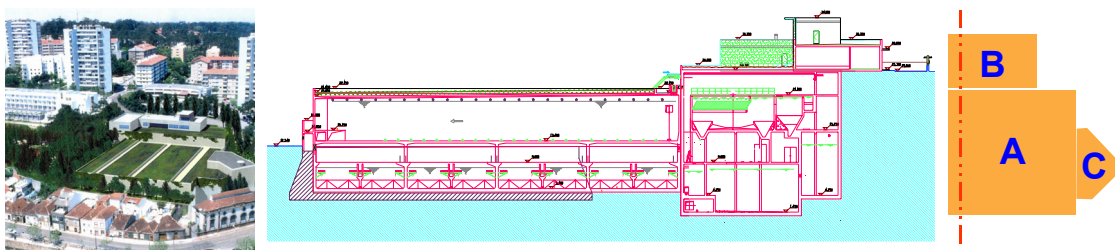


Figura 5.1– Vista aérea da ETAR. Corte pelos corpos A e B. Representação dos corpos A, B e C.

O Corpo A, que será objecto desta análise, é constituído por dois níveis de reservatórios sobrepostos com desenvolvimento em planta de $64 \times 61 \text{ m}^2$. Os 4 reservatórios inferiores desenvolvem-se numa direcção (Oeste-Este) enquanto que os 6 reservatórios superiores se desenvolvem na direcção perpendicular (Norte-Sul) (*Figura 5.2* e *Figura 5.3*).

O sistema portante do nível superior de reservatórios é constituído pelas suas divisórias que se constituem como vigas-parede contínuas (*Figura 5.3*) de 0.50 m de espessura, 7.5 m de altura e com 4 vãos de aproximadamente 15 metros, que suspendem inferiormente a laje de fundo (com vão de cerca de 10 metros) e dão apoio à laje de cobertura ajardinada (*Figura 5.2*). Na ligação à laje de fundo existe uma nervura com 1.0 m de espessura e 0.95 m de altura que permite o alojamento das armaduras de ligação da laje à parede e das armaduras de suspensão. O apoio

destas vigas-parede é realizado por lâminas de 3 m de comprimento e 0.50 m de espessura que descarregam nas paredes dos reservatórios inferiores, que por sua vez conduzem as cargas às fundações (directas). As referidas lâminas desenvolvem-se na direcção perpendicular às vigas-parede dos reservatórios superiores, pelo que o apoio é materializado numa zona muito localizada (*Figura 5.4*).

As cargas que solicitam a estrutura são essencialmente o peso das terras sobre a laje de cobertura, o impulso hidrostático sobre as paredes laterais e o peso de cerca de 7.5 m de altura de líquido sobre a laje de fundo dos reservatórios superiores.

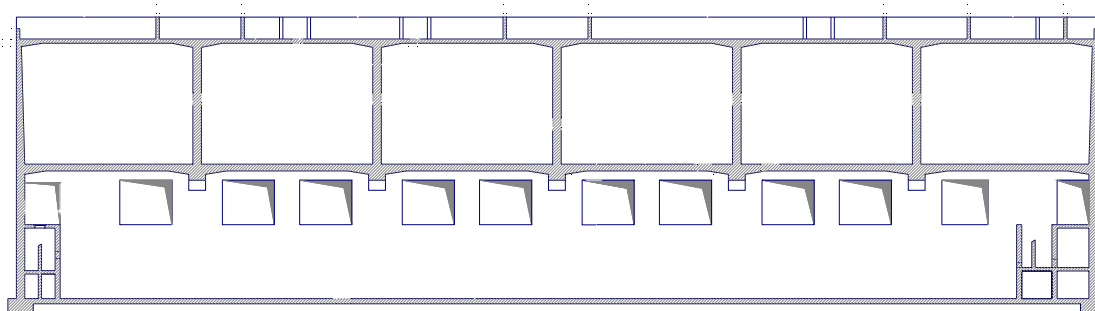


Figura 5.2– Corte pelo corpo A perpendicular ao desenvolvimento das vigas-parede do reservatório superior.

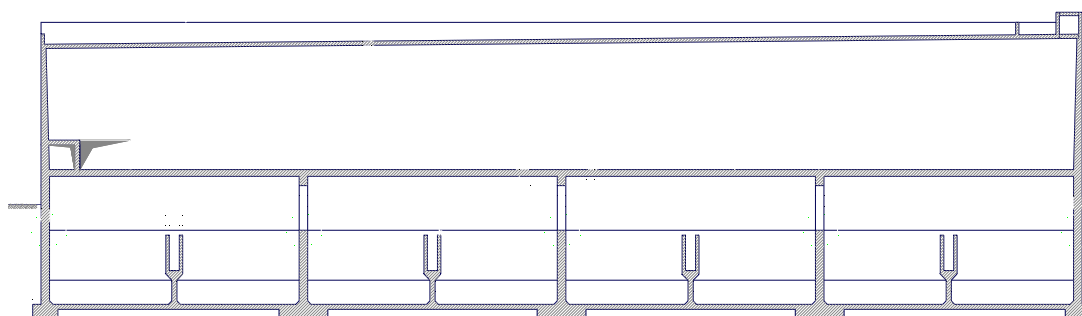


Figura 5.3 – Corte pelo corpo A paralelo ao desenvolvimento das vigas-parede do reservatório superior.

As vigas-parede que sustentam o nível superior de reservatórios são elementos estruturais de análise e dimensionamento complexo. No que se refere aos estados limites últimos, esta complexidade advém da elevada carga suspensa descarregada pela laje de fundo e da reduzida área de contacto das zonas de apoio. Estas zonas de apoio têm a geometria ilustrada na *Figura 5.4*, desenvolvendo-se tridimensionalmente. Acresce ainda o facto de algumas vigas-parede conterem aberturas junto aos apoios extremos (*Figura 5.5*). Estas aberturas impedem a normal transmissão de tensões, ficando os apoios centrais sujeitos a cargas mais elevadas. Por outro lado, a existência de aberturas reduz a rigidez dos tramos respectivos e dificulta a introdução de pré-esforço, agravando as condições de verificação do estado limite de fendilhação. As verificações em serviço também levantam questões delicadas. Dado o carácter permanente de todas as acções, a carga de serviço corresponde à combinação rara, diferindo da carga de estado limite último apenas do factor de majoração $\gamma_f = 1.35$. O estado limite de fendilhação a verificar

é muito severo ($w_k \leq 0.2 \text{ mm}$), de modo a garantir a estanqueidade e impedir o ataque corrosivo do líquido contido. Dado o elevado monolitismo da obra, as questões relacionadas com o controlo da fendilhação devida a deformações impedidas revestem-se de particular importância, não sendo, no entanto, alvo de análise neste estudo.



Figura 5.4– a) Vista inferior da laje de fundo do nível superior de reservatórios. b) Pormenor da zona de apoio intermédio de uma viga-parede com os esquadros de reforço.

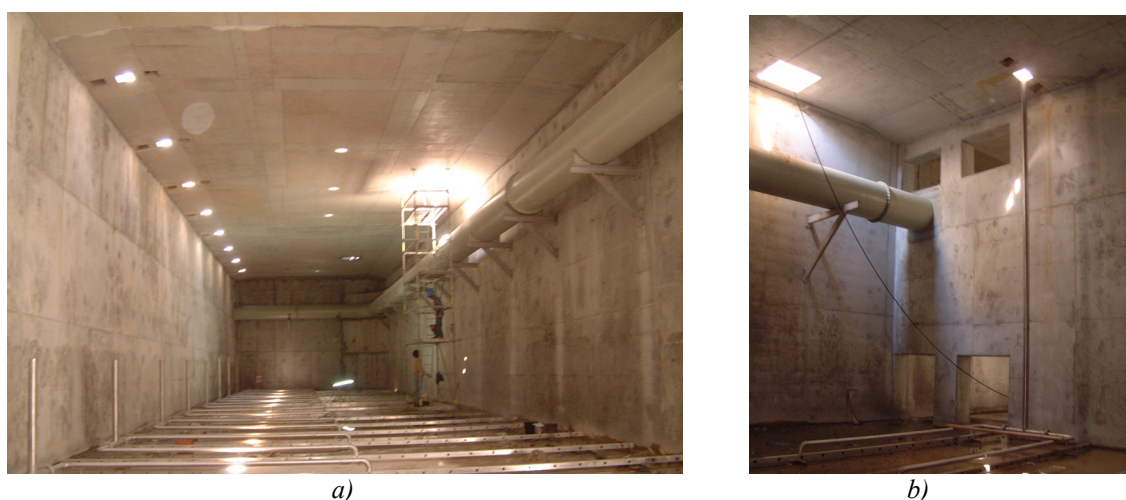


Figura 5.5– a) Vista interior do nível superior de reservatórios. b) Pormenor de um tipo de aberturas junto ao apoio extremo.

5.2 – METODOLOGIA DE ANÁLISE E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

A análise não linear efectuada é subsequente a um exaustivo estudo elástico linear no qual se baseou o dimensionamento das armaduras, se avaliou o efeito da introdução de pré-esforço não aderente e, dentro dos fortes condicionalismos existentes, procurou-se otimizar a forma das zonas de apoio, com a introdução de esquadros de reforço com a largura da nervura (Figura 5.4), e das aberturas. Uma descrição detalhada do estudo realizado pode ser encontrada em (Figueiras e Pimentel 2004; Figueiras et al. 2002).

A aplicação da metodologia habitual de verificação de segurança, baseada no uso de coeficientes parciais, merece alguns reparos no âmbito de uma análise não linear. A realização de uma análise não linear realista implica que o modo de colapso e a capacidade de carga

máxima da estrutura sejam determinados com base nos valores médios das propriedades dos materiais. Por outro lado, a variabilidade que caracteriza as acções e as propriedades dos materiais induz um grau de incerteza na solução estrutural que apenas pode ser correctamente tratada com recurso a métodos estocásticos (Henriques 1998; Santa et al. 2004; Strauss et al. 2004). Para ultrapassar esta dificuldade, observando simultaneamente a aproximação de base probabilística subjacente à regulamentação actual, foi utilizado um procedimento simplificado para a verificação de segurança ao estado limite último de resistência (Figueiras et al. 1994):

- As relações constitutivas são definidas com base nos valores médios das propriedades dos materiais que determinam a flexibilidade da estrutura, adoptando-se os valores característicos para as propriedades que determinam a respectiva capacidade resistente última.
- A solicitação vem definida pelos correspondentes valores característicos, a que corresponde o factor de carga $\lambda = 1.0$. As cargas são incrementadas até se atingir o colapso da estrutura, que determina o factor de carga último λ_u .
- A segurança considera-se satisfeita desde que $\lambda_u \geq \gamma_m * \gamma_f$, em que γ_f é o coeficiente de majoração das cargas e γ_m é o coeficiente parcial de segurança do material, ditado pelo aço ou pelo betão, conforme o tipo de rotura.

Aplicando estes conceitos à estrutura em análise, considerando que neste caso as sobrecargas têm uma variabilidade reduzida (peso do líquido e das terras, $\gamma_f = 1.35$), e que o betão condiciona a rotura ($\gamma_m = 1.5$), o factor de carga último vem dado por:

$$\lambda_u \geq 1.5 * 1.35 = 2.025 \quad (5.1)$$

5.3 – ANÁLISE NÃO LINEAR 2D – VIGAS-PAREDE

No sentido de averiguar o modo de rotura e validar o dimensionamento das armaduras, efectuou-se uma análise em estado plano de tensão de duas vigas-parede, uma delas contendo aberturas no tramo extremo.

5.3.1 – Viga-parede sem aberturas

Foi discretizada metade da viga-parede em elementos quadráticos de oito nós com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss) e as espessuras modeladas de acordo com a *Figura 5.6*.

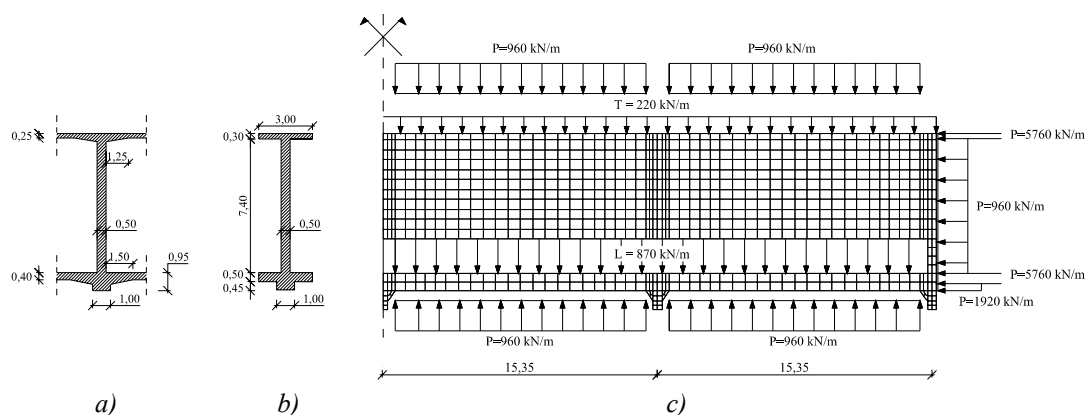


Figura 5.6— Análise bidimensional das vigas-parede: a) Corte transversal; b) Modelação das espessuras; c) Malha de elementos finitos com o esquema das cargas aplicadas (L – peso do líquido e da laje de fundo, T – peso das terras e da laje de cobertura; P – carga equivalente ao pré-esforço).

As condições de apoio adoptadas foram o impedimento dos deslocamentos verticais dos nós correspondentes à base das paredes de apoio e o impedimento dos deslocamentos horizontais ao longo do eixo de simetria. Duma análise elástica global de um quarto do Corpo A da ETAR foram obtidas as cargas a aplicar, representadas na Figura 5.6. A carga equivalente ao pré-esforço resulta da adopção de 3 cordões auto-embainhados de 0.6’’ por face e por metro, ao que correspondem os 960 kN/m, considerando uma força a tempo infinito de 160 kN/cordão. Nos elementos correspondentes às lajes e à nervura, a carga equivalente corresponde aos cordões colocados para garantir uma tensão de compressão no betão de cerca de 1.92 MPa, a mesma instalada pelos cordões horizontais na viga-parede.

As armaduras ordinárias foram modeladas de forma distribuída, embebidas nos elementos de betão. Na Figura 5.7 está representado o mapeamento das diferentes armaduras dispostas na malha de elementos finitos e na

Tabela 5.1 as correspondentes quantidades. Nesta tabela encontra-se ainda a espessura considerada para os elementos finitos. Genericamente tem-se uma malha quadrada de $\phi 16/0.10$ nas zonas correntes, que é substituída na zona dos apoios centrais por uma malha quadrada de $\phi 20/0.10$. A nervura inferior está armada com 15 $\phi 25$. Nos apoios centrais foram ainda dispostos verticalmente 18 varões Dywidag de 36 mm de diâmetro, e 6 metros de comprimento, com o objectivo de absorver parte das elevadas compressões no betão em serviço na zona do apoio localizado, atenuando o efeito da fluência (Figura 5.8). As restantes armaduras correspondem às existentes nos elementos respectivos (laje de fundo, laje de cobertura, parede de topo, paredes inferiores de apoio) ao longo da espessura considerada na análise.

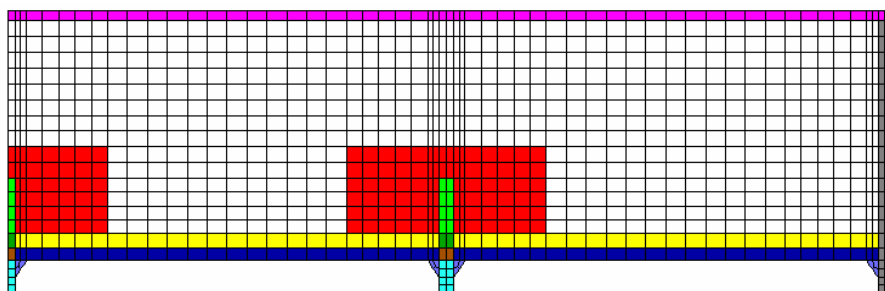













Figura 5.7 – Malha de elementos finitos com a localização das diversas percentagens de armadura adoptadas.

Tabela 5.1 – Quantidades de armadura em correspondência com a localização indicada na Figura 5.7.

	Denominação	Esp. (m)	L_h	L_v	Armadura		Área de armadura		Percentagens de armadura	
					$A_{s,h}$	$A_{s,v}$	$A_{s,h}$	$A_{s,v}$	$A_{s,h}/A_c*100$	$A_{s,v}/A_c*100$
	Parede Corrente	0,50	1,00	1,00	2 ϕ 16//0.10	2 ϕ 16//0.10	40,22	40,22	0,80	0,80
	Parede Reforço	0,50	1,00	1,00	2 ϕ 20//0.10	2 ϕ 20//0.10	62,83	62,83	1,26	1,26
	Laje de fundo	3,00	0,50	1,00	40 ϕ 16	2 ϕ 12//0.10	80,42	22,62	0,54	0,08
	Nervura	1,00	0,45	1,00	15 ϕ 25	2 ϕ 12//0.10	73,63	22,62	1,64	0,23
	Varões 36mm	0,50	1,00	0,50	2 ϕ 20//0.10	18 ϕ 36	62,83	183,22	1,26	7,33
	Laje de fundo/varões 36 mm	3,00	0,50	0,50	40 ϕ 16	18 ϕ 36	80,42	183,22	0,54	1,22
	Nervura/varões 36 mm	1,00	0,45	0,50	15 ϕ 25	18 ϕ 36	73,63	183,22	1,64	3,66
	Pilares	3,00	1,00	0,50	12 ϕ 12//0.125	46 ϕ 25	108,48	225,8	0,36	1,51
	Laje de cobertura	3,00	0,30	1,00	33 ϕ 12	2 ϕ 16//0.10	37,32	40,22	0,41	0,13
	Parede de topo	3,00	1,00	0,50	2 ϕ 16//0.10	48 ϕ 16	40,22	96,51	0,13	0,64
	Esquadros	1,00	1,00	0,40	6 ϕ 12//0.10	8 ϕ 25	67,86	39,27	0,68	0,98

(*) L_h e L_v são os comprimentos de distribuição das armaduras horizontal e vertical, respectivamente.



Figura 5.8 – Pormenor dos varões Dywidag de 36 mm na zona dos apoios.

As propriedades consideradas para os materiais estão dispostas na Tabela 5.2. Dada a existência de armadura aderente em quantidade superior à mínima, foi adoptado o diagrama de retenção de tensões no betão em toda a extensão da estrutura.

Tabela 5.2 – Características dos materiais utilizados.

BETÃO		
C30/37	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$	$f_{ct,m} = 2.6 \text{ Mpa}$
	$G_c = 15000 \text{ N/m}$	$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
AÇO		
A500	$f_{syk} = 500 \text{ MPa}$	

No primeiro incremento de carga foi aplicado a totalidade do peso próprio da parede e do pré-esforço. Nos seguintes foram aplicadas incrementalmente as restantes cargas, correspondendo o factor de carga $\lambda = 1.0$ à combinação rara. A partir do factor de carga $\lambda = 1.8$ activou-se o método do arco ("Arc length control") (Witte e Kikstra 2002a), de modo a captar uma diminuição de λ que permitisse identificar o factor de carga último λ_u .

A rotura da viga-parede deu-se para um factor de carga $\lambda_u = 2.62$, com esmagamento do betão nos esquadros de reforço. Após grandes redistribuições de tensões, e com o betão em acentuado regime de amolecimento, ocorreu divergência do processo de solução. Na *Figura 5.9* está representado um pormenor da malha de elementos finitos na zona do apoio adjacente ao tramo extremo, com a localização dos pontos de Gauss, PG1 e PG2, com os estados de tensão mais desfavoráveis. O ponto de Gauss PG1 pertence a um dos esquadros de reforço, e a evolução da tensão principal de compressão com o factor de carga está representada na *Figura 5.10*, onde é visível que a partir de $\lambda = 2.205$ o seu valor começa a diminuir. Na *Figura 5.11* é possível constatar que o betão está já em regime de amolecimento e pela análise da trajectória de tensões ilustrada na *Figura 5.12* verifica-se que a superfície de rotura foi atingida em compressão biaxial.

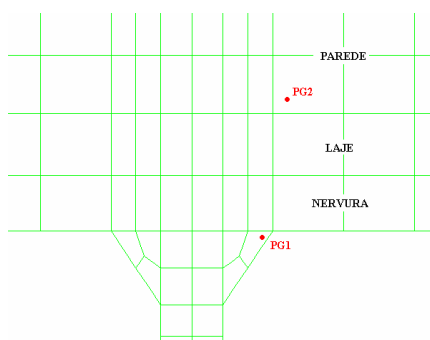


Figura 5.9– Localização dos pontos de Gauss onde se monitorizaram as tensões.

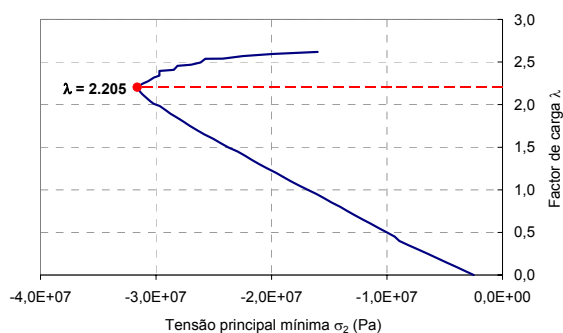


Figura 5.10– Evolução da tensão principal de compressão no ponto de Gauss PG1.

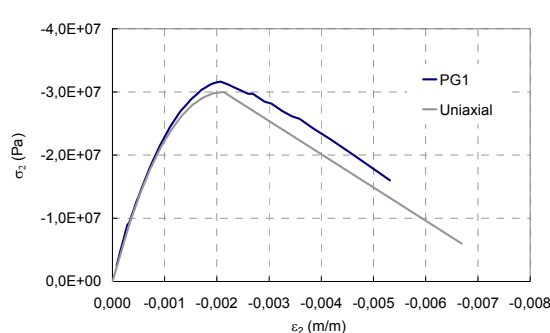


Figura 5.11 – Curva σ_2 - ε_2 no ponto de Gauss PG1.

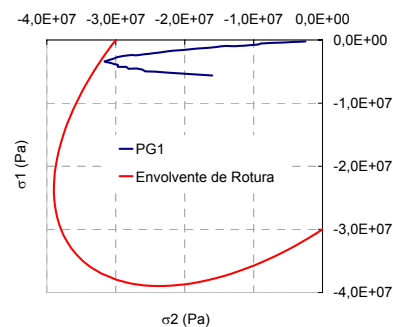


Figura 5.12 – Trajectória de tensões no ponto de Gauss PG1.

O ponto de Gauss PG2, que pertence à viga-parede propriamente dita, está localizado imediatamente acima da laje de fundo. Uma das possíveis formas de rotura global da viga-parede consiste no esmagamento do betão desta região. Apesar das tensões serem mais baixas do que nos esquadros de reforço, a existência de fendilhação pode acarretar a diminuição da tensão resistente, e consequente rotura da escora comprimida. Para obviar este problema foi colocada uma malha reforçada de armadura nesta zona, conforme indicado na Figura 5.7, sendo ainda disposta armadura de cintagem, constituída por 70 cintas $\phi 12$. O confinamento tridimensional assim proporcionado não é modelado na análise 2D, pelo que esta se pode considerar conservativa. Porém, o modelo numérico utilizado não contempla a redução da resistência uniaxial à compressão com a fendilhação. Na Figura 5.14 está representada a evolução da tensão principal de compressão no ponto de Gauss PG2, e a vermelho a evolução da tensão resistente, calculada com o factor de redução proposto por (Maekawa et al. 2003) (Figura 5.13). Verifica-se que para $\lambda = 2.54$ a tensão actuante iguala a tensão resistente, pelo que o betão deveria entrar em regime de amolecimento. No entanto, dado que o efeito de cintagem não foi considerado, e atendendo a que o factor de carga é já bastante superior a 2.025, considerou-se não ser necessária a realização de uma análise posterior com um valor reduzido para a resistência à compressão.

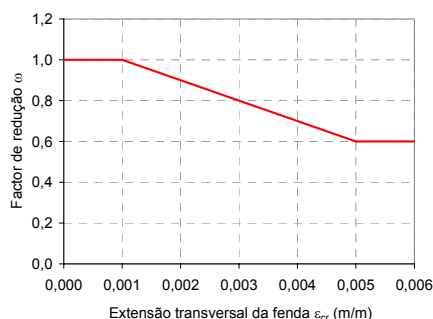


Figura 5.13 – Factor de redução da tensão resistente à compressão uniaxial.

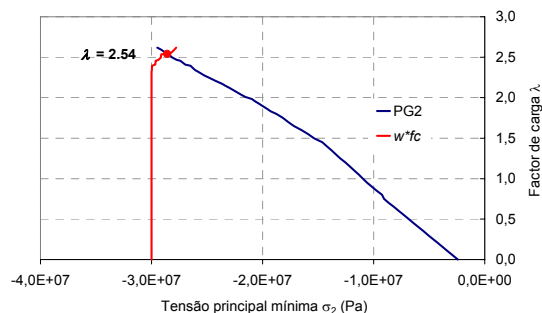


Figura 5.14 – Evolução da tensão principal de compressão no ponto de Gauss PG2.

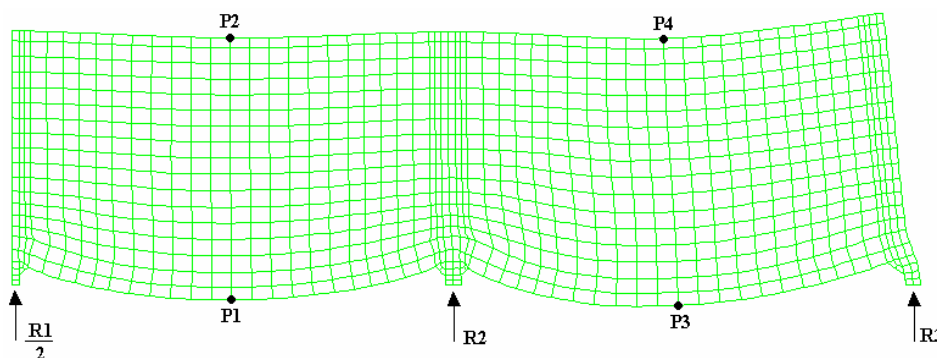


Figura 5.15 – Malha deformada (200x) no último incremento de carga convergido ($\lambda_u = 2.62$).

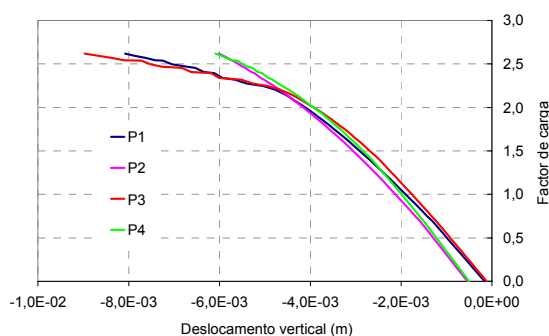


Figura 5.16 – Deslocamentos verticais dos quatro pontos indicados na Figura 5.15.

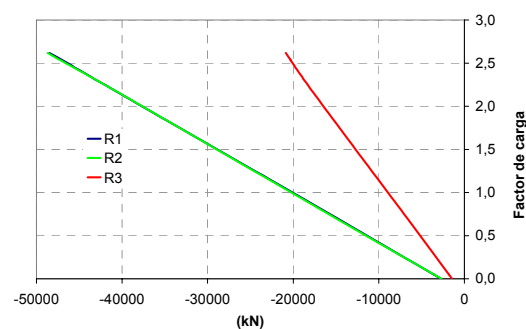


Figura 5.17 – Evolução das reacções verticais de apoio (Figura 5.15) com o factor de carga.

A malha deformada no último incremento de carga convergido está ilustrada na Figura 5.15, juntamente com a localização de quatro pontos dos quais se registou a evolução dos deslocamentos. Na Figura 5.16 pode ver-se que a deformabilidade dos dois vãos é muito semelhante, registando-se maiores deslocamentos nos pontos inferiores da parede a partir do factor de carga $\lambda = 2.20$ devido à propagação de fendas horizontais associadas à suspensão da carga. Na Figura 5.17 está registada a evolução das reacções nas lâminas de apoio da viga-parede, onde se verifica a semelhança dos valores de R1 e R2.

Os padrões de fendilhação correspondentes ao factor de carga $\lambda = 2.20$ e $\lambda_u = 2.62$ estão ilustrados na Figura 5.18 e Figura 5.19, respectivamente. Para $\lambda = 2.20$ é visível que a fendilhação horizontal devida ao efeito de suspensão da carga começa a desenvolver-se, explicando o evolução dos deslocamentos de P1 e P3.

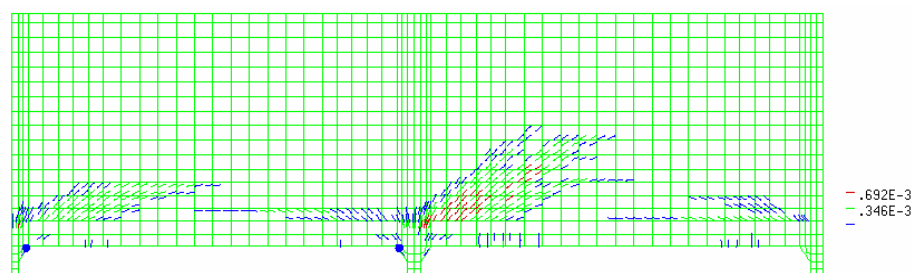


Figura 5.18 – Padrão de fendilhação para $\lambda = 2.20$. Os círculos representam fendas no pano da estrutura.

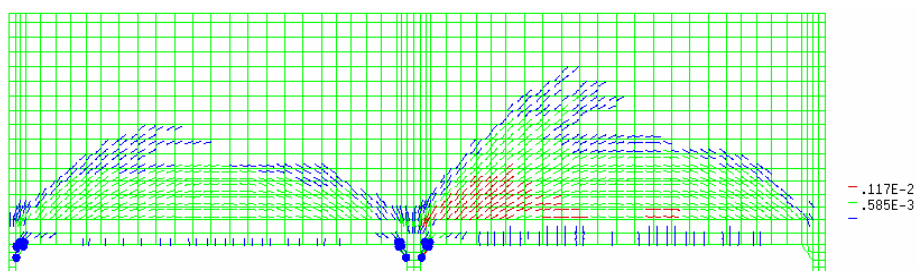


Figura 5.19 – Padrão de fendilhação no último incremento de carga convergido $\lambda_u = 2.62$. Os círculos representam fendas no pano da estrutura.

Os mapas das tensões nas armaduras horizontais e verticais para a carga de rotura estão ilustrados na Figura 5.20 e Figura 5.21, onde se pode constatar que estão ainda longe da cedência.

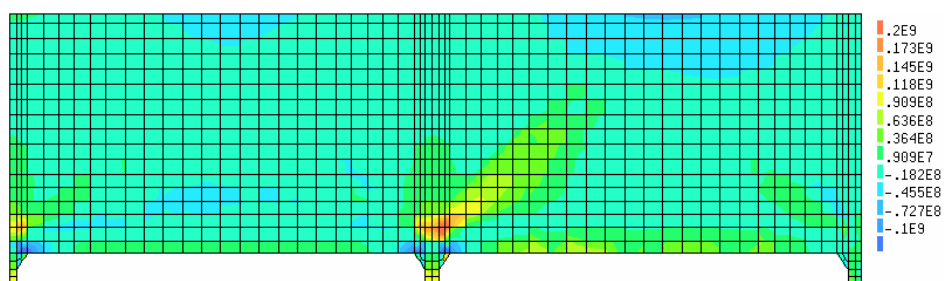


Figura 5.20 – Mapa com as tensões nas armaduras horizontais no último incremento de carga convergido $\lambda_u = 2.62$.

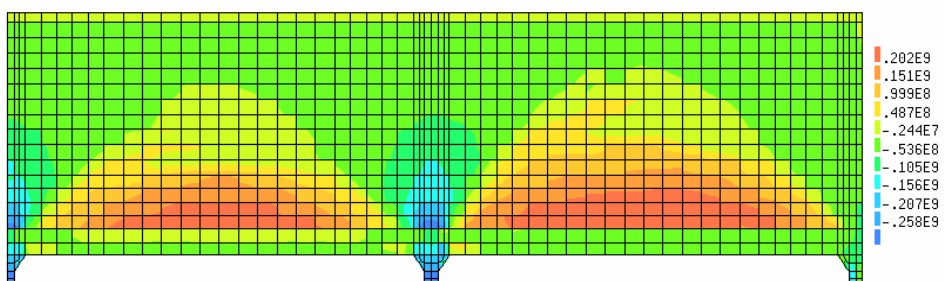


Figura 5.21 – Mapa com as tensões nas armaduras verticais no último incremento de carga convergido $\lambda_u = 2.62$.

Do que até aqui foi exposto, pode concluir-se que o modo de rotura da viga-parede é materializado pelo esmagamento do betão na zona superior do esquadro de reforço adjacente ao vão extremo, eventualmente seguido de esmagamento do betão fendilhado imediatamente acima da laje de fundo. Dadas as tensões calculadas nas armaduras, a rotura é sempre condicionada pelo betão, pelo que a consideração do factor de carga limite $\lambda = 2.025$ se revela apropriada. Na análise efectuada, no esquadro de reforço a superfície de rotura é atingida para $\lambda = 2.205$ em compressão biaxial, existindo posteriores redistribuições de tensões até $\lambda_u = 2.62$. No entanto, o estado de tensão nesta região é tridimensional, tendo sido alvo de uma análise mais detalhada descrita em 5.4. Desprezando o efeito de confinamento das cintas colocadas, a tensão resistente do betão da parede imediatamente acima da laje de fundo é igualada para $\lambda = 2.54$, pelo que a

segurança em relação a uma rotura da escora fendilhada está verificada. Devido à acção do pré-esforço, a primeira fendilhação ocorre apenas para $\lambda = 1.25$ sendo desta forma verificado o estado limite de fendilhação em serviço devido às cargas aplicadas.

5.3.2 – Viga-parede com aberturas

A geometria da viga-parede analisada, juntamente com as cargas aplicadas, está representada na *Figura 5.22*. O valor do pré-esforço horizontal corresponde ao traçado adoptado para os cordões, tendo sido desviados de forma a contornar as aberturas, mantendo o mesmo valor total da força de pré-esforço horizontal da viga-parede sem aberturas.

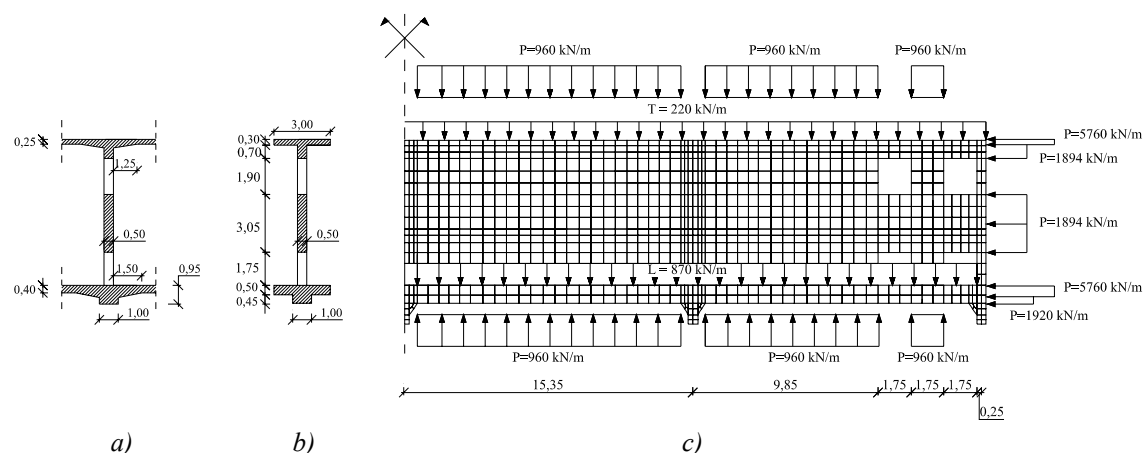


Figura 5.22 – Análise bidimensional das vigas-parede com aberturas: a) Corte transversal; b) Modelação das espessuras; c) Malha de elementos finitos com o esquema das cargas aplicadas (L – peso do líquido e da laje de fundo, T – peso das terras e da laje de cobertura; P – carga equivalente ao pré-esforço).

Tal como no caso anterior, discretizou-se apenas metade da viga-parede e foram utilizados elementos quadráticos de oito nós com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss) assim como as mesmas condições de apoio. Os materiais considerados foram os mesmos, incluindo a utilização do diagrama de retenção de tensões de tracção em toda a malha. A armadura foi igualmente modelada de forma distribuída e as quantidades consideradas estão representadas na *Figura 5.23* e na *Tabela 5.3*. Em relação à viga-parede anterior apenas é diferente a armadura na zona das aberturas.

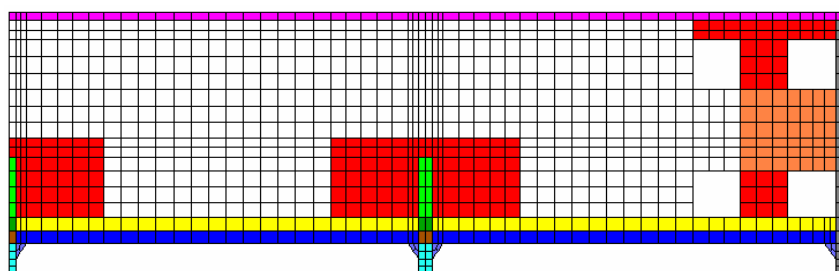


Figura 5.23 – Malha de elementos finitos com a localização das diversas percentagens de armadura adoptadas.

Tabela 5.3 – Quantidades de armadura em correspondência com a localização indicada na Figura 5.7.

	Denominação	Esp. (m)	L _h	L _v	Armadura		Área de armadura		Percentagens de armadura	
					A _{s,h}	A _{s,v}	A _{s,h}	A _{s,v}	A _{s,h} /A _c *100	A _{s,v} /A _c *100
	Parede Corrente	0,50	1,00	1,00	2φ16//0.10	2φ16//0.10	40,22	40,22	0,80	0,80
	Parede Reforço	0,50	1,00	1,00	2φ20//0.10	2φ20//0.10	62,83	62,83	1,26	1,26
	Abeturas Reforço	0,50	1,00	1,00	2φ16//0.10	2φ20//0.10	40,22	62,83	0,80	1,26
	Laje de fundo	3,00	0,50	1,00	40φ16	2φ12//0.10	80,42	22,62	0,54	0,08
	Nervura	1,00	0,45	1,00	15φ25	2φ12//0.10	73,63	22,62	1,64	0,23
	Varões 36mm	0,50	1,00	0,50	2φ20//0.10	18φ36	62,83	183,22	1,26	7,33
	Laje de fundo/varões 36 mm	3,00	0,50	0,50	40φ16	18φ36	80,42	183,22	0,54	1,22
	Nervura/varões 36 mm	1,00	0,45	0,50	15φ25	18φ36	73,63	183,22	1,64	3,66
	Pilares	3,00	1,00	0,50	12φ12//0.125	4φ25	108,48	225,8	0,36	1,51
	Laje de cobertura	3,00	0,30	1,00	33φ12	2φ16//0.10	37,32	40,22	0,41	0,13
	Parede de topo	3,00	1,00	0,50	2φ16//0.10	48φ16	40,22	96,51	0,13	0,64
	Esquadros	1,00	1,00	0,40	6φ12//0.10	8φ25	67,86	39,27	0,68	0,98

(*) L_h e L_v são os comprimentos de distribuição das armaduras horizontal e vertical, respectivamente.

A evolução das reacções de apoio com o factor de carga está representada na Figura 5.24, e ao contrário do que se verificou na viga-parede sem aberturas, regista-se uma diferença assinalável entre a reacção R1 e R2. Com efeito, a presença das aberturas impede a normal transmissão de carga ao apoio extremo R3, sobrecarregando o apoio adjacente R2. Este facto motiva a ocorrência de esmagamento do betão na região dos esquadros de reforço para factores de carga inferiores aos registados a viga-parede sem aberturas. A tensão máxima de compressão é atingida para $\lambda = 1.911$ (Figura 5.25), entrando a partir daí o betão em regime de amolecimento (Figura 5.26). A trajectória de tensões está representada na Figura 5.27, sendo muito parecida à da viga-parede anterior. Para o factor de carga $\lambda_u = 2.23$ ocorreu uma divergência do processo de solução.

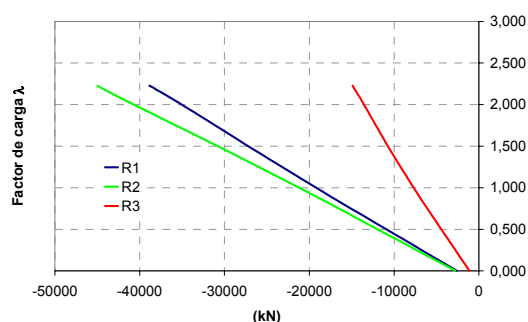


Figura 5.24– Evolução das reacções verticais de apoio (Figura 5.30) com o factor de carga.

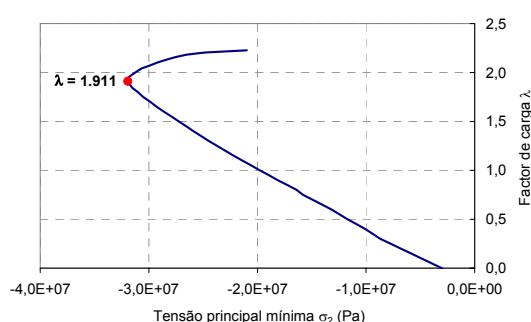


Figura 5.25– Evolução da tensão principal de compressão no ponto de Gauss PG1.

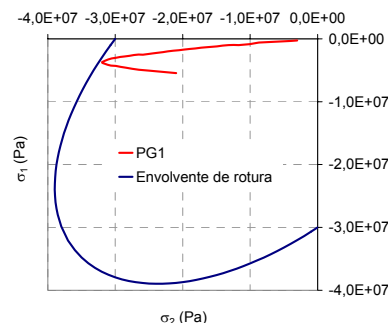
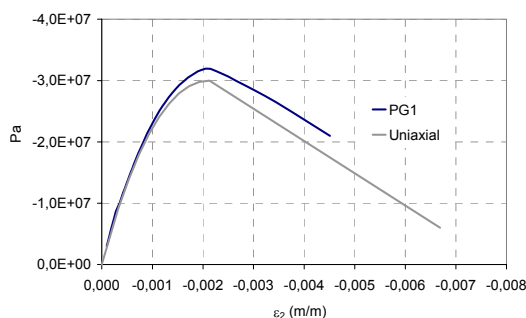


Figura 5.26 – Curva σ_2 - ϵ_2 no ponto de Gauss PG1. Figura 5.27 – Trajectória de tensões no ponto de Gauss PG1.

Ao contrário do que aconteceu na análises da viga-parede sem aberturas, neste caso não ocorre esmagamento do betão acima da laje de fundo, conforme demonstra o gráfico da Figura 5.28, onde se verifica que a tensão principal de compressão não atinge a tensão resistente reduzida ω^*f_c .

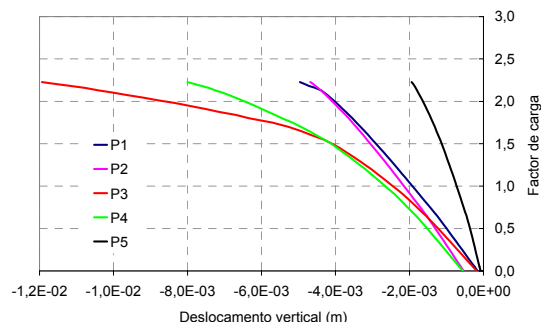
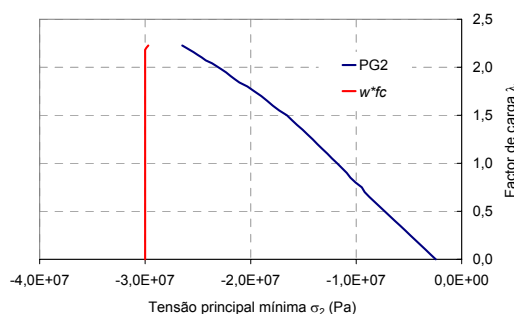


Figura 5.28 – Evolução da tensão principal de compressão no ponto de Gauss PG2.

Figura 5.29 – Deslocamentos verticais dos cinco pontos indicados na Figura 5.30.

Na Figura 5.29 está registada a evolução dos deslocamentos verticais dos pontos identificados na Figura 5.30. A maior deformabilidade do vão que contém as aberturas está bem patente no andamento dos gráficos e na deformada representada. O padrão de fendilhação correspondente a $\lambda_u = 2.23$ está ilustrado na Figura 5.31.

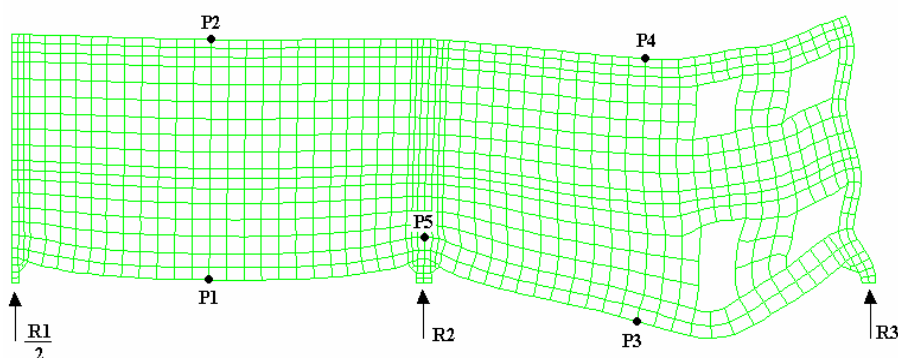


Figura 5.30 – Malha deformada (200x) no último incremento de carga convergido ($\lambda_u = 2.23$).

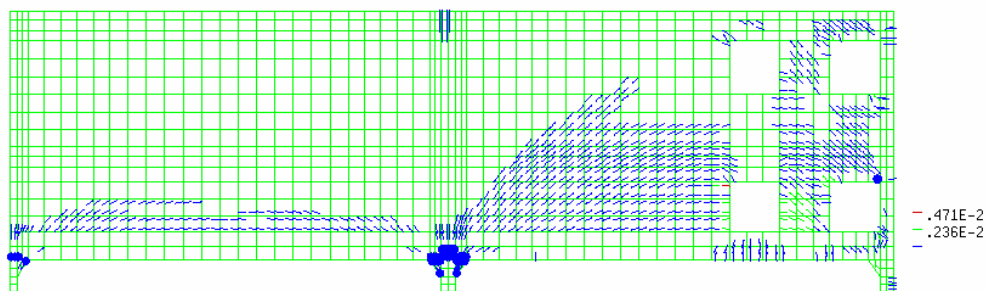


Figura 5.31 – Padrão de fendilhação no último incremento de carga convergido ($\lambda_u = 2.23$). Os círculos representam fendas no plano da estrutura.

Os mapas das tensões nas armaduras horizontais e verticais estão representados na Figura 5.32 e Figura 5.33, respectivamente. As armaduras verticais na região das aberturas atingem a cedência para factores de carga $\lambda = 2.13$ e $\lambda = 1.98$, ao longo dos alinhamentos A-A e B-B, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 5.34 e Figura 5.35.

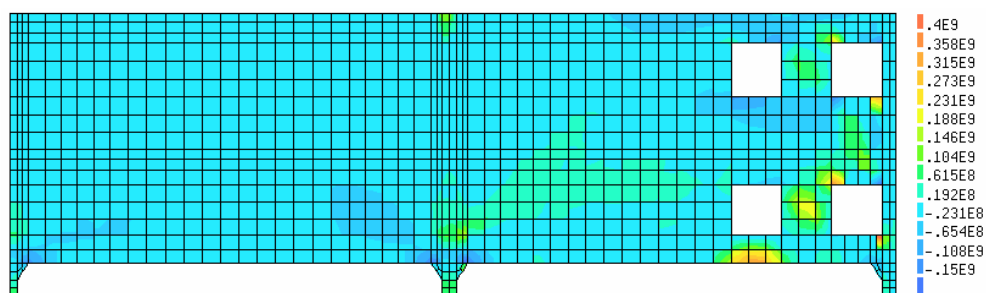


Figura 5.32 – Mapa com as tensões nas armaduras horizontais no último incremento de carga convergido ($\lambda_u = 2.23$).

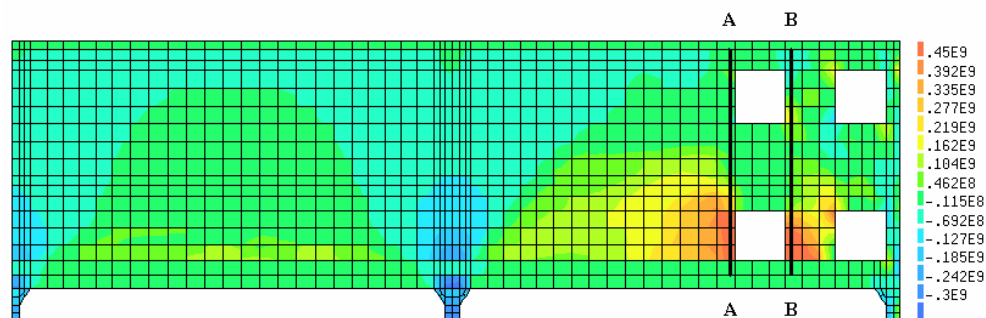


Figura 5.33 – Mapa com as tensões nas armaduras verticais no último incremento de carga convergido ($\lambda_u = 2.23$).

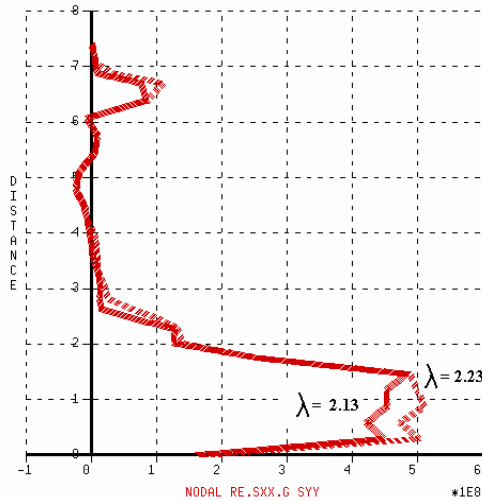


Figura 5.34 – Evolução das tensões nas armaduras verticais ao longo do corte A-A da Figura 5.33.

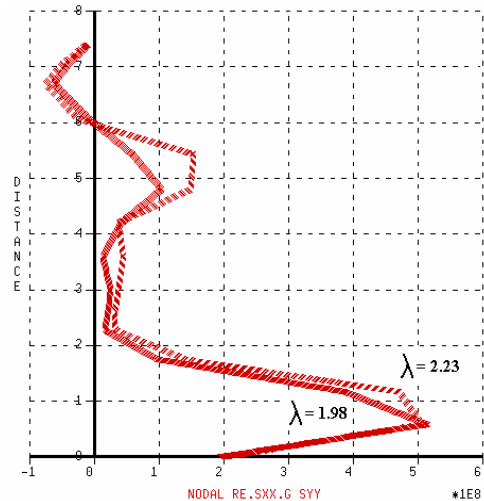


Figura 5.35 – Evolução das tensões nas armaduras verticais ao longo do corte B-B da Figura 5.33.

Dos resultados apresentados conclui-se que o modo de rotura desta viga-parede é condicionado pelo esmagamento do betão nos esquadros de reforço. A superfície de rotura é atingida para um factor de carga $\lambda = 1.91$, existindo posteriores redistribuições de tensões. Dado o carácter tridimensional da geometria e do estado de tensão desta região, vai ser alvo duma análise mais detalhada em 5.4.

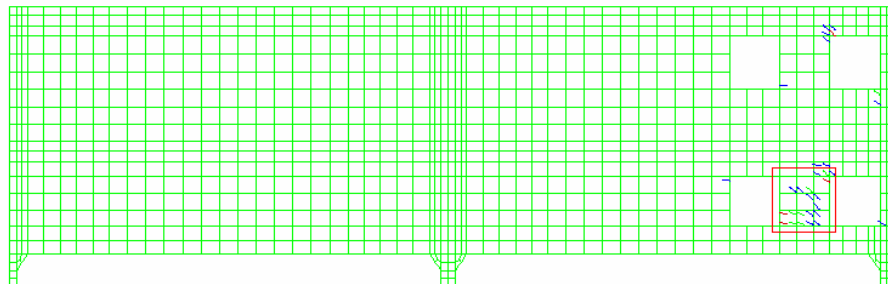


Figura 5.36 – Padrão de fendilhação na combinação de serviço ($\lambda = 1.0$).

Na combinação de serviço, correspondente à combinação rara ($\lambda = 1.0$), o padrão de fendilhação está representado na Figura 5.36, onde se destaca a região onde as aberturas das fissuras são maiores. As maiores extensões, ε_{cr} , correspondentes às fissuras ocorrem nas extremidades das aberturas e correspondem a fissuras horizontais, portanto menos influenciadas pelos efeitos devidos às tensões originadas pelas deformações impedidas. Desta forma é possível efectuar uma avaliação do valor característico da abertura de fendas a partir dos resultados da análise efectuada. De acordo com o EC2 (CEN 2002), e considerando um recobrimento de 40mm, o valor da distância máxima entre fendas vale $s_{r,m\acute{a}x} = 406$ mm. Ao longo deste comprimento, o valor médio da extensão referente às fendas na zona mais desfavorável desta região vale $\varepsilon_{cr} = 0.44E-03$. A abertura característica w_k vem então dada por (5.2), verificando-se ser inferior ao limite estabelecido, encontrando-se assim verificado o estado limite de fendilhação.

$$w_k = 406 * 0.44E - 03 = 0.18 \leq 0.2 \text{ mm} \quad (5.2)$$

5.4 – ANÁLISE NÃO LINEAR 3D – REGIÃO DOS APOIOS

Das análises anteriores constatou-se que a resistência da região de apoio das vigas-parede é condicionante no que respeita à verificação ao estado limite último de resistência da estrutura. No entanto, as análises bidimensionais efectuadas não reproduzem o verdadeiro estado de tensão instalado. Verificou-se, nomeadamente na análise da viga-parede com aberturas, que na zona crítica a tensão de rotura é atingida para um factor de carga $\lambda = 1.91$, tendo-se obtido o factor de carga último da estrutura, $\lambda_u = 2.23$, devido às redistribuições de tensões subsequentes. Dado o elevado número de vezes que este elemento estrutural se repete no Corpo A da ETAR, justifica-se uma investigação mais aprofundada do comportamento estrutural desta região localizada, só possível através de uma análise tridimensional.

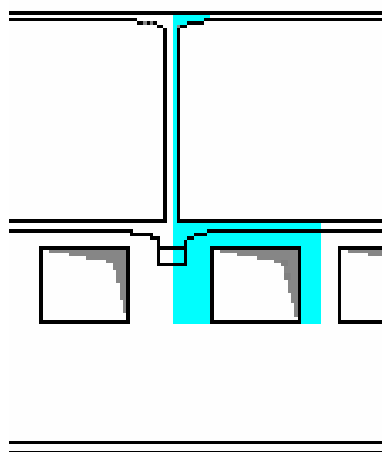


Figura 5.37– Corte perpendicular ao desenvolvimento das vigas-parede do nível superior dos reservatórios. A azul está representada a zona analisada na modelação 3D.

Para este efeito construiu-se um modelo 3D com recurso a elementos quadráticos tridimensionais de 20 nós, com integração completa (3x3x3 pontos de Gauss). De modo a minimizar o esforço de cálculo, foi apenas modelada a região indicada na *Figura 5.37*, tendo sido utilizadas as condições fronteira ilustradas esquematicamente na *Figura 5.38* e na *Figura 5.39* e explicitadas na *Tabela 5.4*, que permitiram a análise do estado de tensão e deformação da região de apoio sem modelar a totalidade da viga-parede. Foram definidas condições de simetria em relação ao plano ZY (plano de desenvolvimento da viga-parede) no meio vão da laje de fundo e a meio da espessura da parede. Em relação ao plano ZX (perpendicular ao desenvolvimento da viga parede), foram impostas condições de simetria a meio do vão interior, e a cerca de 62.5% do vão extremo. Estas duas últimas condições foram definidas a partir da análise da distribuição de tensões de corte e da deformada do modelo elástico plano da viga-

parede com aberturas, conforme ilustrado na *Figura 5.40*. Ao longo dos alinhamentos onde as tensões σ_{xy} se anulam foram introduzidas condições de simetria, cuja adequabilidade é reforçada pela análise da deformada. Devido aos esforços de membrana induzidos pelo pré-esforço, algumas das condições de simetria não puderam ser definidas da forma usual, tendo-se imposto a igualdade dos deslocamentos perpendiculares ao plano de simetria, e não o seu valor nulo, de modo a permitir o encurtamento sob a acção do pré-esforço.

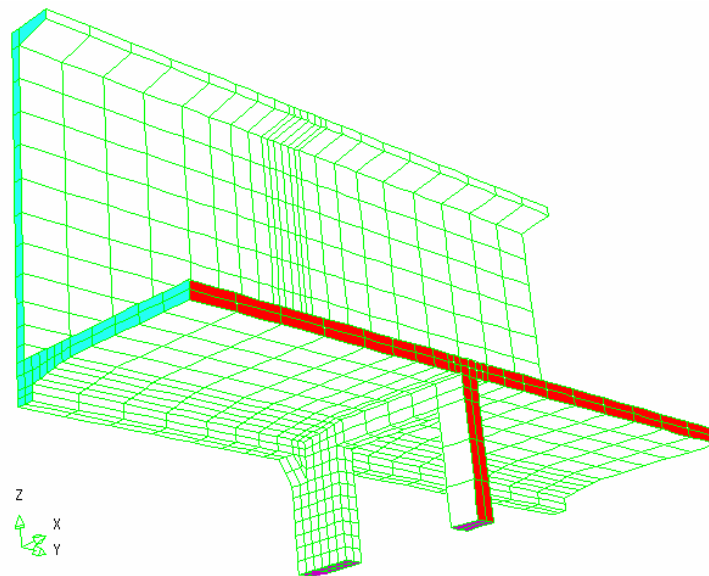


Figura 5.38 – Perspectiva da malha de elementos finitos. Identificação das condições fronteira.

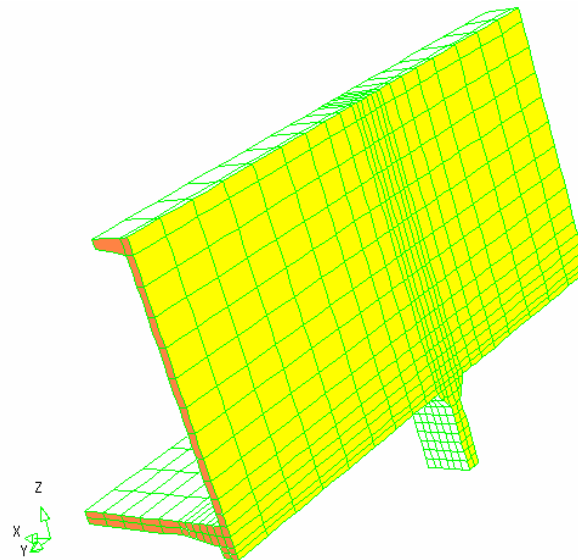





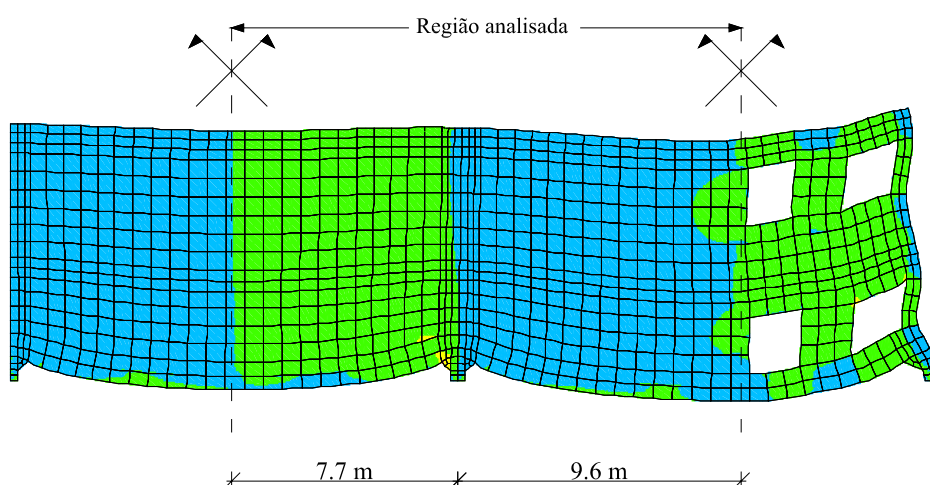


Figura 5.39 – Perspectiva da malha de elementos finitos. Identificação das condições fronteira.

Tabela 5.4 – Código de cores das condições fronteira do modelo 3D.

	Denominação	Restrição
	Apoio inferior	$U_Z = 0$
	Simetria ZX	$U_Y = 0$
	Simetria ZX (2)	U_Y iguais
	Simetria ZY	$U_X = 0$
	Simetria ZY (2)	U_X iguais

Figura 5.40 – Identificação do troço de parede modelado na análise tridimensional a partir da distribuição elástica σ_{xy} e da deformada do modelo plano.

Todas as armaduras passivas previstas no projecto foram modeladas como embebidas nos elementos de volume. Os varões de 36mm dispostos na região do apoio foram discretizados em elementos de barra, as restantes armaduras foram modeladas com elementos bidimensionais (Figura 5.41 e Figura 5.42). O pré-esforço da viga-parede e da laje de fundo foi modelado através de elementos de armadura não aderente, com tensão inicial correspondente ao valor especificado a tempo infinito. Esta formulação é idêntica à consideração das cargas equivalentes, na medida em que estes elementos não contribuem para a matriz de rigidez da estrutura.

As características consideradas para os materiais são idênticas às indicadas na Tabela 5.2, e já utilizadas nas análises anteriores. Dada a presença de armadura aderente em quantidade superior à mínima adoptou-se o diagrama de retenção de tracções no betão ao longo de toda a estrutura. O modelo material utilizado foi o modelo “Multifix”, de acordo com as definições referidas em 4.1.1 para a análise tridimensional.

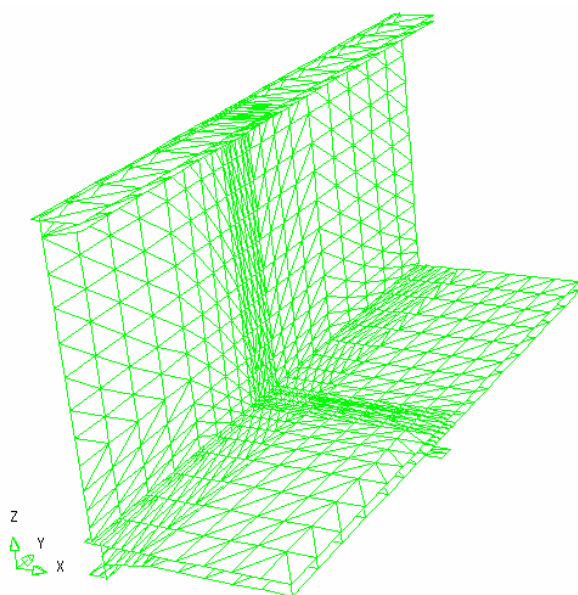


Figura 5.41 – Perspectiva global da malha de armaduras passivas.

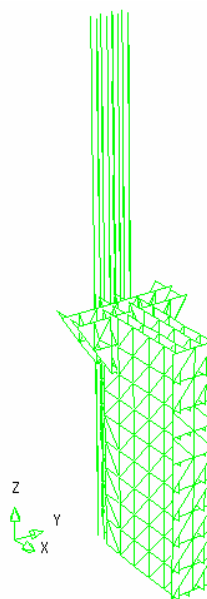


Figura 5.42 – Perspectiva das armaduras da zona da lâmina de apoio.

No primeiro incremento de carga foi aplicado a totalidade do peso próprio da parede e do pré-esforço. Nos seguintes foi aplicado incrementalmente o peso dos 7.5 metros de altura de líquido sobre a laje de fundo (correspondentes a 75kN/m^2), conjuntamente com a carga descarregada pela laje de cobertura sobre metade da espessura da parede (110 kN/m). O factor de carga $\lambda = 1.0$ corresponde assim à combinação rara. A partir do factor de carga $\lambda = 2.8$ activou-se o método do arco ("Arc length control").

A partir do factor de carga $\lambda = 2.82$ não foi obtida convergência do processo de solução. O estado de tensão, no último incremento de carga convergido ($\lambda = 2.82$), de todos os pontos de integração pertencentes aos vários elementos estruturais modelados, está representado nos gráficos da Figura 5.43 à Figura 5.46. Nestes, relaciona-se a tensão média $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ com a tensão de corte $\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, sendo visível que a envolvente de rotura de Mohr-Coulomb foi atingida em pontos de Gauss de todos os elementos estruturais.

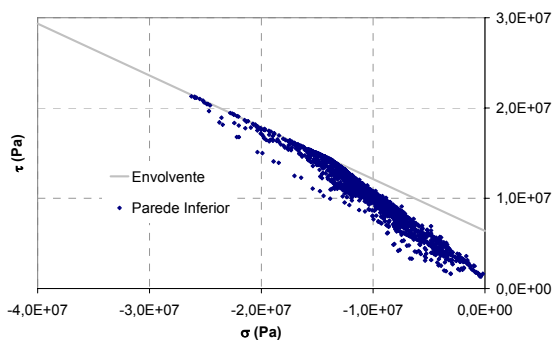


Figura 5.43 – Estado de tensão da parede inferior no último incremento de carga convergido.

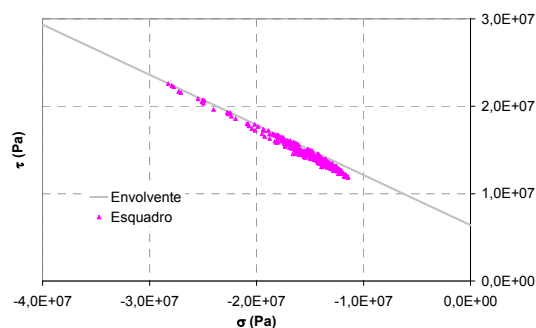


Figura 5.44 – Estado de tensão dos esquadros no último incremento de carga convergido.

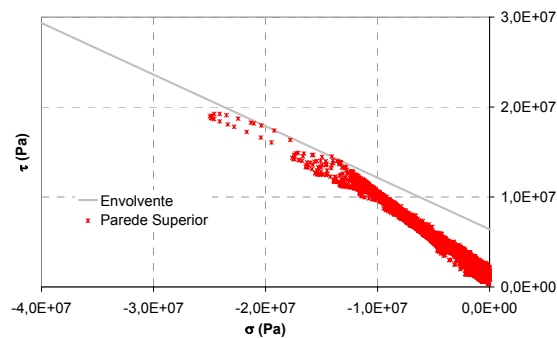


Figura 5.45 – Estado de tensão da parede superior no último incremento de carga convergido.

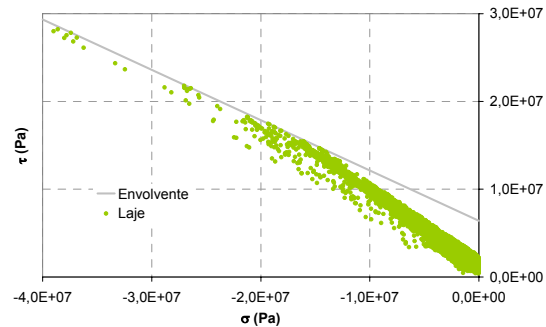


Figura 5.46 – Estado de tensão da laje no último incremento de carga convergido.

Na Figura 5.47 estão representadas as trajectórias de tensão dos pontos de Gauss com os estados de tensão de compressão multiaxial condicionantes de cada um dos elementos estruturais. Todos estes pontos estão representados na Figura 5.50, juntamente com o mapa da tensão principal mínima σ_3 . A Figura 5.48, com a evolução das distâncias à envolvente de rotura de Mohr-Coulomb em função do factor de carga, permite efectuar a verificação de segurança em relação à rotura por esmagamento em compressão triaxial. É visível que o ponto pertencente ao esquadro de reforço toca a superfície de rotura no incremento de carga correspondente ao factor de carga $\lambda = 2.6$, embora só no último incremento de carga convergido seja possível detectar a entrada em regime de amolecimento, conforme atesta o gráfico da Figura 5.49.

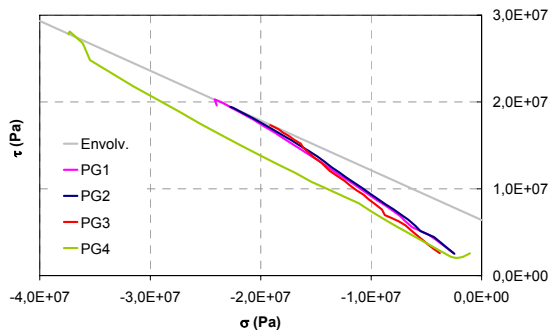


Figura 5.47 – Trajectória de tensões de vários pontos em compressão multiaxial.

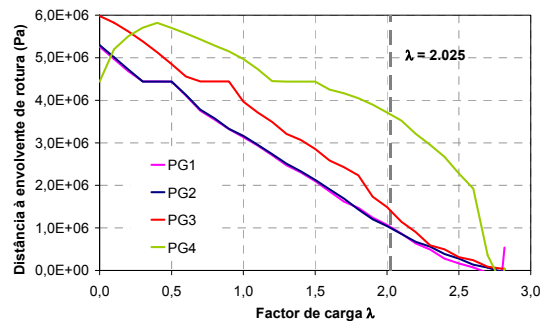


Figura 5.48 – Distância à envolvente de rotura de Mohr-Coulomb.

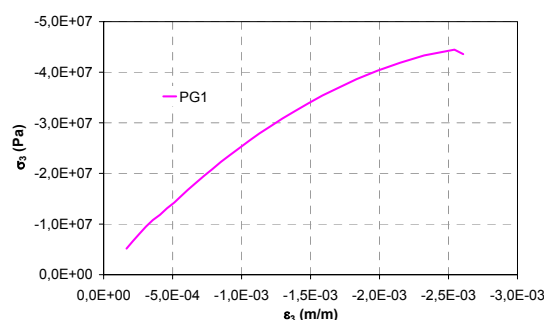


Figura 5.49 – Diagrama σ_3 - ϵ_3 num ponto de Gauss pertencente ao esquadro de reforço.

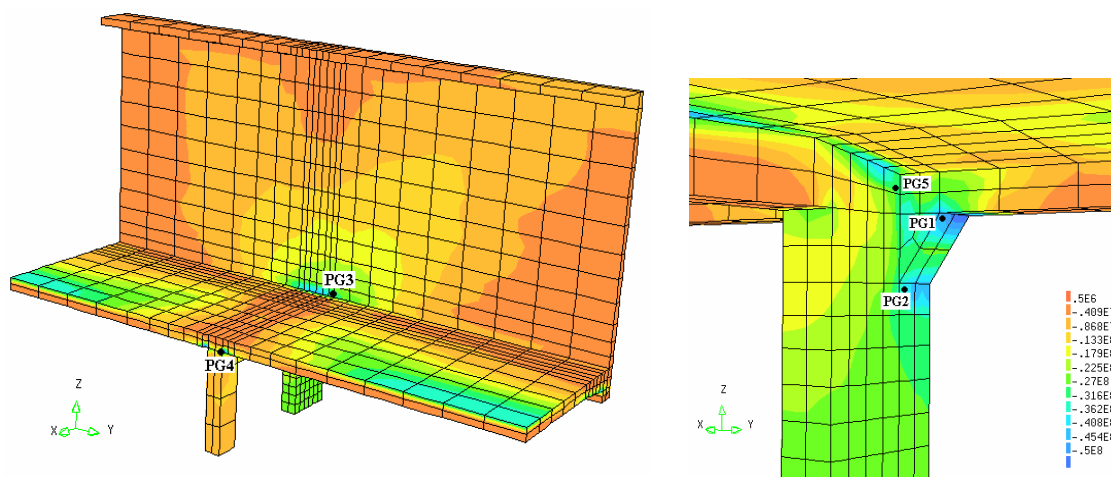


Figura 5.50 – Distribuição das tensões principais de compressão para $\lambda = 2.82$

Devido à fendilhação ocorrida na parede de apoio associada ao espalhamento do campo de compressões, tornou-se necessário verificar o esmagamento do betão na direcção paralela ao desenvolvimento das fissuras. Na *Figura 5.51* está representado o padrão de fissuração da lâmina central de apoio e na *Figura 5.52* o mapa com as tensões na armadura segundo xx . O ponto mais desfavorável nestas condições é o ponto de Gauss PG5, cuja evolução da tensão principal de compressão está traçada no gráfico da *Figura 5.53*, juntamente com a resistência uniaxial de compressão reduzida de acordo com o factor ω dado na *Figura 5.13*. Verifica-se que para $\lambda = 2.74$, a tensão actuante excede a tensão resistente ω^*f_c , pelo que o betão deveria entrar em regime de amolecimento. No entanto dado que este factor de carga é já bastante superior ao valor requerido para a verificação de segurança, não se realizou uma análise posterior com um valor reduzido de f_c .

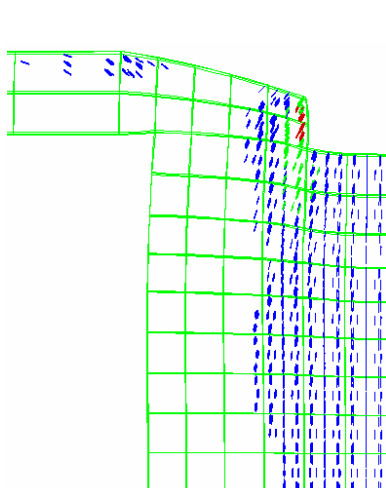


Figura 5.51 – Padrão de fissuração na lâmina central de apoio ($\lambda = 2.82$).

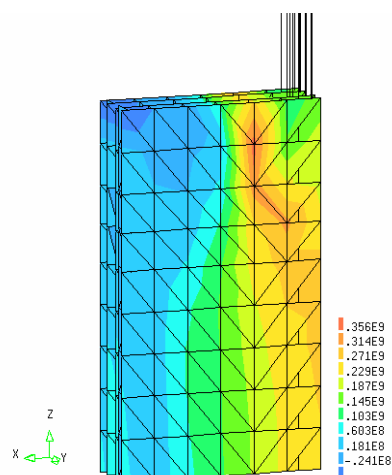


Figura 5.52 – Tensões nas armaduras horizontais na lâmina central de apoio ($\lambda = 2.82$)

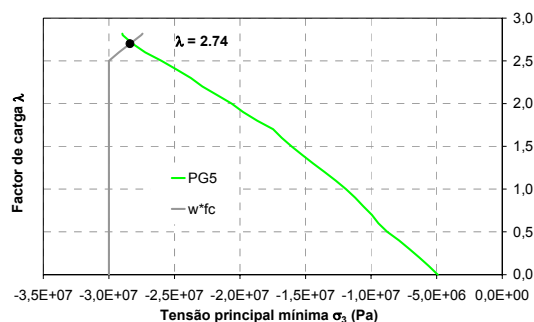


Figura 5.53 – Evolução da tensão σ_3 no ponto de Gauss PG5.

As tensões nos varões de 36 mm dispostos na região do apoio estão ilustradas na Figura 5.54, para os factores de carga $\lambda = 1.0$, $\lambda = 2.1$ e $\lambda = 2.82$.

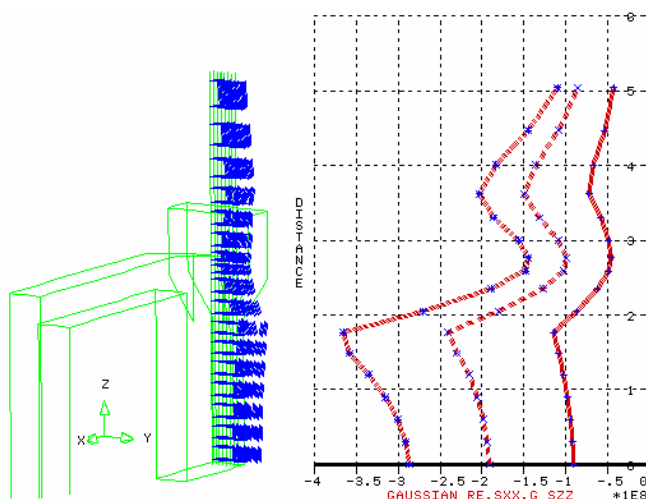


Figura 5.54 – Tensão nos varões de 36 mm para os factores de carga $\lambda = 1.0$, $\lambda = 2.1$ e $\lambda = 2.82$.

A evolução das reacções verticais no apoio do modelo 3D está representada na Figura 5.55, efectuando-se uma comparação com a evolução da reacção do apoio correspondente nos modelos 2D (correspondente à reacção R2). Da análise 3D conclui-se que a reacção na lâmina central da parede inferior de apoio é cerca de 85% da reacção total do apoio intermédio, diferença esta que obviamente não é contabilizada nos modelos planos, e que muito contribui para os níveis de carga alcançados na modelação tridimensional. O incremento de carga para o qual o estado de tensão nos esquadros toca a envolvente em cada um dos modelos está realçado por um ponto, estando associado a reacções que vão desde 40 MN do modelo 2D com aberturas até aos 43.3 MN na lâmina central do modelo 3D (correspondentes a uma reacção total de 49.3 MN).

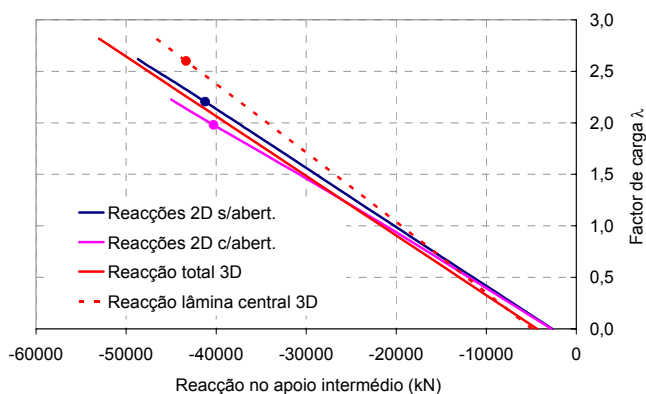


Figura 5.55 – Evolução da reacção vertical de apoio. Comparação com os modelos 2D.

A perspectiva global da malha deformada está representada na Figura 5.56, e um pormenor da deformada da parede inferior na Figura 5.57. Nos gráficos da Figura 5.58 e da Figura 5.59, ilustra-se a evolução dos deslocamentos verticais dos pontos indicados na Figura 5.56.

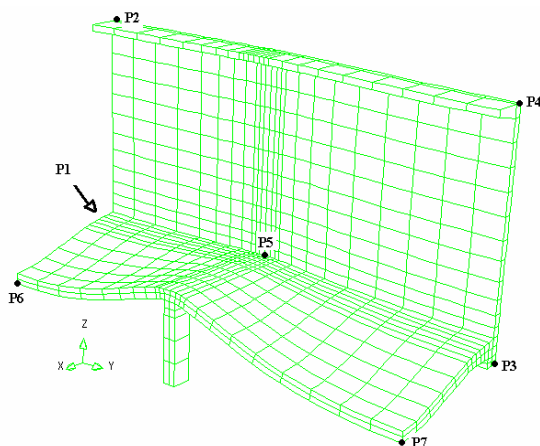


Figura 5.56 – Perspectiva global da malha deformada (30x) para $\lambda=2.812$.

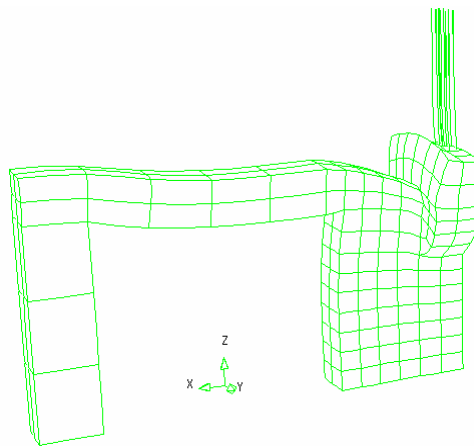


Figura 5.57 – Pormenor da deformada (175x) da zona de apoio.

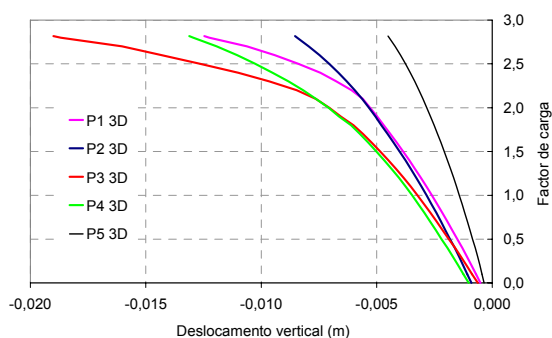


Figura 5.58 – Evolução dos deslocamentos verticais dos pontos P1 a P5.

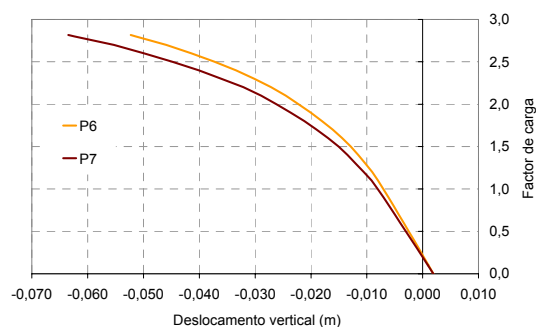


Figura 5.59 – Evolução dos deslocamentos verticais dos pontos P6 e P7.

É possível comprovar que a deformação do apoio não é desprezável em relação à deformação da parede, pois o deslocamento de P5 é superior a metade do deslocamento de P1. Nos modelos 2D este aspecto não é bem reproduzido, pelo que a comparação directa entre os deslocamentos dos modelos 2D com os do modelo 3D não é exequível. A adequação das condições fronteira

impostas no modelo 3D pode ser aferida por comparação dos deslocamentos relativos a um ponto comum com os modelos planos, nomeadamente o ponto localizado imediatamente sobre o apoio intermédio, P5. Na *Figura 5.60* está representada a variação do deslocamento dum ponto no meio vão intermédio do modelo 2D com aberturas, o ponto P1, e do ponto correspondente no modelo 3D, em relação ao ponto P5, sendo notável a concordância entre ambas as modelações. Dada a presença das aberturas no modelo plano, os deslocamentos no ponto situado no vão extremo não são directamente comparáveis.

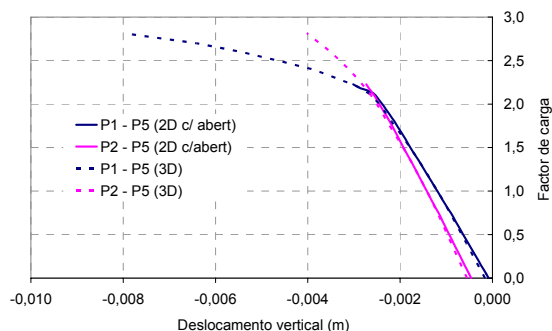
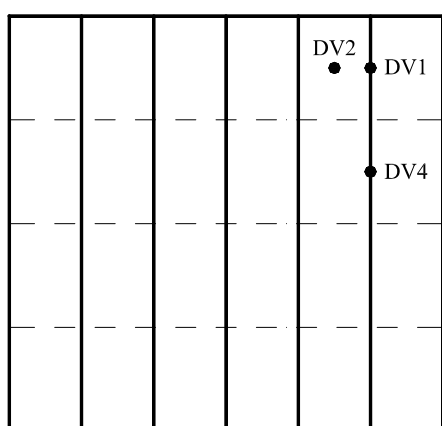


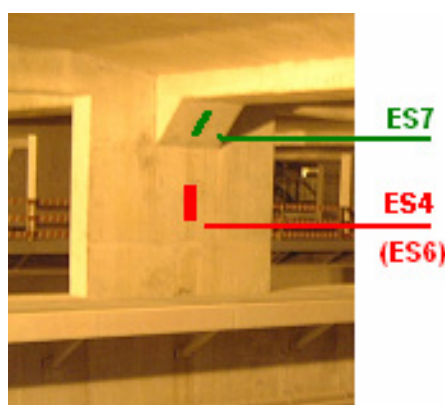
Figura 5.60 – Comparação dos deslocamentos entre o modelo 3D e o modelo 2D com aberturas.

5.5 – RESULTADOS DA INSTRUMENTAÇÃO DURANTE O ENCHIMENTO

De forma a monitorizar o comportamento do reservatório durante a fase de enchimento foram colocados transdutores de deslocamento sob as vigas-parede (DV1 e DV4) e sob as lajes de fundo (DV2), assim como extensómetros colados no betão na região dos esquadros de reforço (ES7) e parede de apoio (ES4 e ES6), de acordo com os esquemas da *Figura 5.61*.



a)



b)

Figura 5.61 – Instrumentação durante o enchimento: a) Planta do nível superior de reservatórios com a localização dos LVDT's. b) Localização dos extensómetros. O extensómetro ES4 está localizado 75 cm abaixo da aresta inferior do esquadro e o ES6 na mesma posição na face oposta da parede.

A evolução no tempo das leituras efectuadas está representada na *Figura 5.62* e *Figura 5.63*. Importa realçar que a viga-parede sob a qual foram medidas as flechas não tem exactamente a mesma geometria de qualquer das duas vigas-paredes analisadas, na medida em que a geometria e a posição das aberturas é ligeiramente diferente, estando estas localizadas apenas no canto inferior do tramo extremo. Com efeito, as paredes modeladas representam os dois casos extremos que ocorrem em todo o reservatório: o caso da parede sem aberturas e o caso da parede com a geometria de aberturas mais desfavorável.

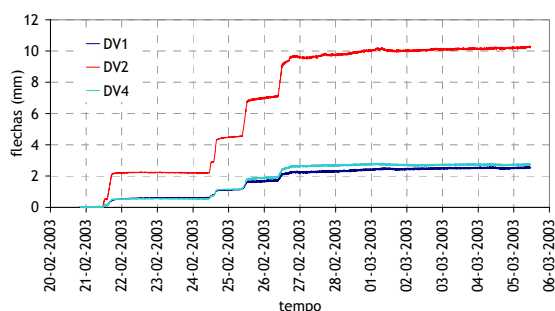


Figura 5.62 – Evolução das flechas com o tempo.

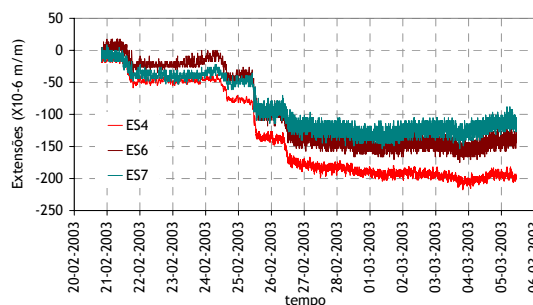


Figura 5.63 – Evolução das extensões com o tempo.

Do gráfico com a evolução das flechas verifica-se, e ao contrário do que em princípio seria expectável, que o valor da flecha no vão extremo (DV1) é inferior à flecha medida no vão intermédio (DV4). Este facto pode ser explicado por dois factores:

- Tal como já referido atrás, no modelo de cálculo tridimensional, e conforme se pode ver do gráfico da *Figura 5.58*, o deslocamento do ponto P5, situado imediatamente por cima do apoio intermédio, é da mesma ordem de grandeza do deslocamento a meio vão da parede. É visível que o deslocamento de P5 é cerca de metade do deslocamento de P1. Na estrutura real, este facto será ainda mais acentuado, na medida em que o referido apoio não foi modelado na sua totalidade, conforme se pode ver na *Figura 5.37*. Pode-se então concluir que a deformabilidade dos apoios centrais não é desprezável em relação à deformação do conjunto. Já os apoios extremos têm um comportamento muito mais rígido, na medida em que o apoio é materializado ao longo de toda a altura da viga-parede e a parede de apoio tem um desenvolvimento apreciável. Por outro lado, dado o reduzido valor das flechas medidas, da ordem dos 2 mm, o efeito da deformabilidade das fundações (directas) também poderá ter algum significado. Estes factos contribuem para aumentar a flecha a meio dos vãos intermédios, na medida em que estes sofrem um “assentamento de apoio” em ambas as extremidades, e os vãos extremos apenas numa.
- Para este nível de carga ainda não ocorreu fendilhação, pelo que a diminuição de rigidez devida às aberturas não é tão sensível.

Da observação do gráfico com as leituras dos extensómetros, verifica-se uma diferença entre as leituras dos sensores ES4 e ES6, colocados na mesma posição, mas em faces opostas da parede de apoio. Este facto parece indicar a existência de flexão deste elemento. Esta flexão é possível de ocorrer, na medida em que é de esperar uma rotação do apoio intermédio no sentido do vão extremo. No esquema da *Figura 5.64* ilustra-se a interpretação do funcionamento da viga parede.

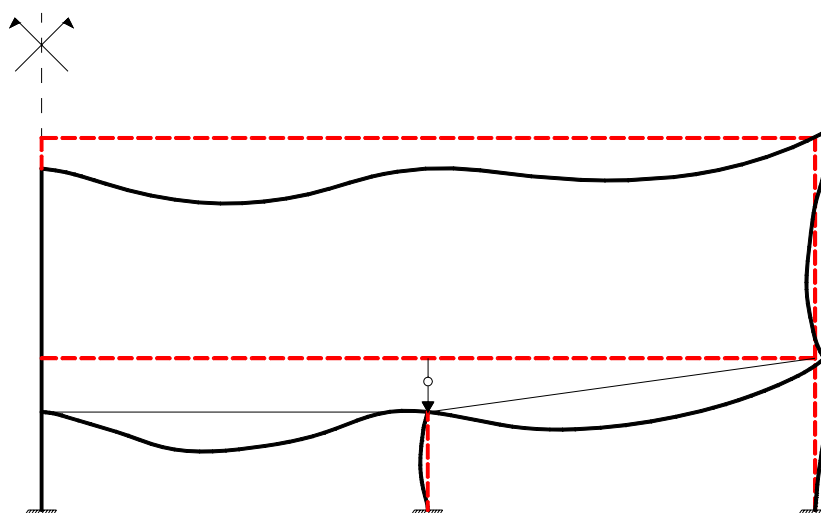


Figura 5.64 – Funcionamento esquemático da viga-parede. a vermelho a configuração indeformada a negro a configuração deformada.

A comparação das grandezas medidas experimentalmente com os valores previstos pelo modelo numérico deve ser efectuada com alguma cautela. No caso das flechas, nos modelos 2D não se efectuou uma discretização da totalidade das paredes de apoio, e dado que a sua deformabilidade é da mesma ordem de grandeza da da viga-parede, os valores das flechas calculados nos modelos 2D tenderão a ser inferiores aos reais, principalmente nos vãos intermédios sendo esse afastamento menor nos vãos extremos. No modelo 3D, apesar da discretização mais completa da região do apoio, ainda assim este não foi modelado na sua totalidade. Por outro lado, as condições de simetria utilizadas não permitem captar o efeito da maior rigidez do apoio de extremidade. Neste caso, será de esperar que as flechas medidas no vão intermédio sejam superiores às calculadas e que no vão extremo essa diferença seja menor. No caso da laje, e dada a sua muito maior deformabilidade, todos estes aspectos são de menor significado no valor da flecha final.

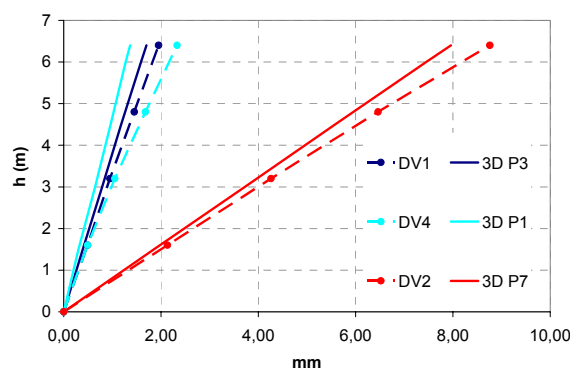


Figura 5.65 – Evolução das flechas com a altura de líquido. Comparação dos valores medidos com os calculados no modelo 3D. A tracejada as flechas medidas, a cheio e à mesma cor, os correspondentes deslocamentos do modelo 3D.

Na Figura 5.65 está representada a evolução das flechas medidas com a altura de líquido, assim como os valores dos deslocamentos de pontos do modelo 3D em correspondência com a posição dos LVDT's. Os desvios verificados, de cerca de 40% nos valores das flechas no vão intermédio, de 13% no vão extremo e de 9% no valor da flecha da laje, estão em correspondência com a interpretação atrás avançada. Os valores experimentais foram obtidos, a partir dos valores iniciais e finais de cada fase de enchimento, de forma a eliminar os efeitos da deformação diferida do betão, visíveis no gráfico da Figura 5.62.

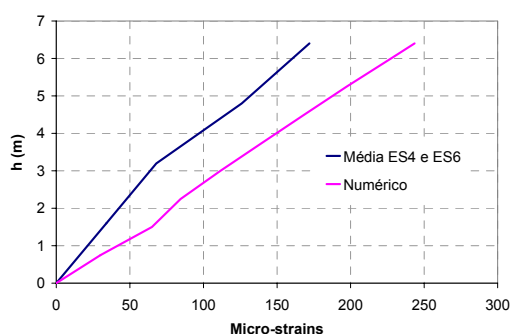


Figura 5.66 – Comparação da média das extensões medidas em cada face da lâmina inferior de apoio (ES4 e ES6) com as extensões calculadas.

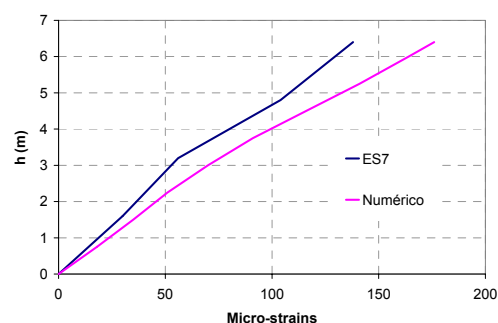


Figura 5.67 – Comparação das extensões medidas no esquadro (ES7) com as extensões calculadas.

No que respeita aos valores medidos pelos extensómetros ES4 e ES6, dadas as condições fronteira utilizadas no modelo 3D, não é possível captar a flexão da lâmina de apoio. Assim sendo, a comparação com os valores numéricos foi feita com a média dos valores medidos nos dois extensómetros, e está representada na Figura 5.66. Existe um afastamento de cerca de 40% entre os valores lidos e os calculados. A comparação referente às extensões medidas no esquadro de reforço pelo extensómetro ES7 está representada na Figura 5.67, sendo o afastamento entre os valores lidos e os calculados de cerca de 20%. Em ambos os casos as extensões medidas são inferiores às calculadas.

5.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a utilização de um modelo de análise não linear foi possível efectuar a verificação da segurança de uma estrutura laminar complexa de forma consistente, confirmando o dimensionamento feito com base em modelos elásticos. A partir de uma modelação global da estrutura da ETAR, foram obtidas as cargas a aplicar nos elementos estruturais de comportamento mais delicado, as vigas-parede que sustentam o nível superior de reservatórios. Efectuando uma análise não linear 2D de duas destas vigas-parede verificou-se que a região dos apoios era crítica para a segurança global, dado que o modo de rotura identificado através destas análises foi o esmagamento do betão nos esquadros de reforço. Dado o estado de tensão tridimensional desta zona, só recorrendo a uma análise 3D se pôde analisar a segurança em relação ao esmagamento do betão. Para o efeito, construiu-se um modelo 3D da zona do apoio, tendo para o efeito sido também discretizada parte da viga-parede e da laje de fundo do nível superior de reservatórios, de forma a obter uma estimativa aproximada do estado de tensão e de deformação desta zona crítica. Com esta última análise a segurança em relação ao esmagamento do betão no apoio foi verificada.

A metodologia utilizada, que consistiu em ir procedendo a sucessivos refinamentos das análises, sempre que tal se demonstrava necessário, revelou-se essencial para a obtenção de resultados em tempo útil e facilitou a interpretação dos resultados obtidos.

O formato de segurança utilizado merece ser revisto, sendo este um campo onde ainda são necessários grandes desenvolvimentos. O uso de métodos estocásticos, recorrendo a métodos de simulação (método de Monte-Carlo, método do Hipercubo Latino), apesar de teoricamente mais consistente, torna estas análises muito dispendiosas. Para se obter uma correcta estimativa da probabilidade de rotura, e dado o seu reduzido valor, pode ser necessário um número elevado de simulações (na ordem das centenas). Por outro lado, o formato de segurança utilizado, apesar de simples, não tira o devido partido do maior rigor da análise, na medida em que os coeficientes parciais de segurança são iguais aos preconizados para outros tipos de análises mais simples.

Por último, uma referência aos dados da monitorização durante o enchimento. Ao contrário do que sucedeu com as estruturas ensaiadas em laboratório, os resultados numéricos estão algo afastados dos experimentais. Para isto muito contribuiu o facto de ser ter efectuado uma modelação parcial da estrutura em análise, o que obrigou à introdução de condições fronteira sempre difíceis de quantificar. No entanto, a análise destes resultados foi de grande utilidade na interpretação do funcionamento da estrutura. Ficou assim patente a utilidade de um sistema integrado de monitorização, incluindo um modelo numérico devidamente calibrado durante a construção e ensaios de carga. Este modelo deveria incluir todos os aspectos que fossem tidos como relevantes para explicar a evolução das grandezas medidas. Neste caso concreto poderia

ser necessário incluir o solo de fundação, dada a sua possível influência na deformação total dos apoios centrais das vigas-parede.

Ficou também patente que quaisquer que sejam os modelos utilizados no dimensionamento, desde os modelos de equilíbrio limite até aos mais sofisticados modelos de análise não linear, constituem sempre uma idealização e uma aproximação da realidade construída. Cabe sempre ao engenheiro decidir se o grau de aproximação atingido é, ou não, suficiente para a verificação de segurança em relação a um determinado estado limite.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

6 – CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1 – SUMÁRIO E CONCLUSÕES

No Capítulo 1, o processo de análise e dimensionamento de estruturas de betão foi descrito e avaliado, tendo sido apontadas as inconsistências decorrentes do facto de, ainda hoje, se adoptarem leis constitutivas distintas no processo de cálculo dos esforços actuantes (lei elástica e linear) e no processo de cálculo dos esforços resistentes (leis não lineares). Constatou-se que, no caso de estruturas laminares de betão, e nomeadamente nas de comportamento menos corrente, uma metodologia racional de dimensionamento deve culminar com a realização de uma análise não linear, de forma a poder obter uma estimativa completa e realista da resposta estrutural, desde as fases de serviço até à rotura. Dados os grandes avanços verificados simultaneamente ao nível da capacidade computacional e da sofisticação dos modelos constitutivos, os modelos de análise não linear de estruturas de betão (ANLE) apresentam-se hoje como uma ferramenta muito útil não só no processo de dimensionamento de estruturas complexas, mas também no desenvolvimento de novos sistemas estruturais, na verificação de segurança de estruturas existentes, na avaliação de cenários de reforço e em estudos de carácter forense. Fruto do reconhecimento da sua importância, está a ser ultimado um boletim da *Federation Internationale du Beton (fib)*, no sentido de fornecer um conjunto de instruções e procedimentos para a aplicação dos modelos de análise não linear (fib 2004). É reconhecido que o uso deste tipo de modelos não lineares requer conhecimentos aprofundados ao nível do comportamento mecânico do betão estrutural, dos modelos constitutivos, assim como experiência de aplicação deste tipo de formulações. O desenvolvimento da dissertação foi então orientado no sentido de permitir um ganho de competências nesta área e avaliar as possibilidades e os desafios que ainda hoje se colocam neste domínio, que a seguir se passam a expor conjuntamente com uma descrição sumária do trabalho realizado.

Mecânica não linear do betão estrutural

No Capítulo 2 foi levada a cabo uma revisão do estado da arte do comportamento do betão estrutural sujeito a carregamentos estáticos e de curta duração, mas não necessariamente proporcionais. Neste campo constatou-se ser importante compreender o *volume de controlo* sobre o qual uma determinada teoria é válida. As teorias simultaneamente mais simples e mais

gerais são estabelecidas a um nível mais elementar, com um *volume de controlo* mais reduzido. No entanto, do ponto de vista da aplicabilidade prática a problemas de engenharia civil, é preferível o estabelecimento das leis constitutivas em valores médios, homogeneizados sobre um volume de controlo maior, de alguma forma relacionado com o tamanho dos elementos finitos, que constituem o procedimento numérico mais divulgado no seio da comunidade técnica e científica associada à análise estrutural. É neste contexto que devem ser entendidas muitas das teorias expostas no Capítulo 2. Dentro da mecânica não linear do betão estrutural foi possível estabelecer três sectores fundamentais que devem ser incluídos em qualquer modelo básico de ANLE: a mecânica do betão comprimido, a mecânica do betão traccionado e a mecânica associada à transferência de tensões de corte entre fendas.

Dentro do âmbito estudado, pode afirmar-se que o corpo teórico hoje estabelecido permite uma abordagem racional ao comportamento do betão, existindo um modelo teórico satisfatório para a generalidade dos fenómenos relevantes para o cômputo da resposta das estruturas de betão simples ou armado, quando sujeitas a carregamentos estáticos.

Modelação computacional do comportamento do betão estrutural

As diferentes abordagens à modelação computacional do comportamento do betão estrutural, no contexto da análise por elementos finitos, podem ser classificadas de acordo com o tipo de descrição cinemática do processo de localização das deformações, tendo-se concluído que a abordagem mais competitiva para a análise de estruturas na prática corrente é a que se baseia no conceito de *descontinuidades fracas*. Ao longo do Capítulo 3 foram descritas as principais formulações usualmente adoptadas neste contexto. Foi possível constatar que existe uma grande diversidade de abordagens, desde as que são suportadas em formulações mecânicas clássicas até às que são baseadas numa aproximação mais fenomenológica e empírica. Dos variadíssimos modelos propostos na literatura, pode concluir-se que todas as propostas têm um desempenho superior às demais em determinadas estruturas/condições de carregamento e inferior noutras circunstâncias. Este aspecto requer do utilizador um grande conhecimento acerca dos pressupostos do modelo que está a utilizar. Apesar de ser difícil, senão impossível, encontrar um modelo que forneça os melhores resultados sobre toda a gama de tipos estruturais e condições de carregamento, é de todo conveniente eleger modelos versáteis que possam ser utilizados em todas as situações. Desta forma, os modelos de fendas fixas que contemplam a possibilidade de ocorrência de fendas não ortogonais aliam a versatilidade ao rigor necessário na generalidade das análises. Neste campo, os modelos com decomposição das extensões são conceptualmente mais correctos. No entanto, as formulações explícitas, apesar de menos rigorosas, são de programação mais simples e robusta, oferecem menos problemas de convergência da solução e requerem menos esforço de cálculo. No contexto da análise dinâmica, ou da análise estocástica

em que seja necessário um grande número de simulações, estes dois últimos factores podem ser decisivos.

Um factor importante a ter em conta na escolha de um determinado modelo numérico reside na validação a que foi sujeito. Neste aspecto, os modelos que foram extensivamente validados contra resultados experimentais sobre os mais variados tipos estruturais são relativamente poucos quando comparados com a grande quantidade de propostas referidas na literatura, sendo de referir, neste campo, o trabalho de (Maekawa et al. 2003). A este respeito é fundamental a constituição de uma extensa base de dados coligindo resultados experimentais credíveis para validação de qualquer modelo antes da sua utilização intensiva.

Desempenho dos modelos disponíveis na análise de estruturas testadas em laboratório

Na modelação computacional de estruturas laminares de betão os principais desafios colocam-se na modelação de problemas em que os esforços de corte desempenham um papel determinante, como sejam as roturas por corte em vigas ou lajes (punçoamento). As roturas governadas por mecanismos de flexão não apresentam hoje dificuldades à generalidade dos modelos numéricos. Assim sendo, no Capítulo 4 foram analisadas várias estruturas em estado plano de tensão, onde os esforços de corte no plano eram relevantes, no intuito de avaliar a capacidade dos modelos numéricos disponíveis na reprodução de resultados experimentais observados em alguns elementos estruturais de funcionamento delicado. As análises efectuadas permitiram comprovar a versatilidade dos modelos de fendas fixas com possibilidade de fissuração não ortogonal, em contraste com as formulações co-rotacionais.

Dada a liberdade concedida pelo software disponível na fixação de parâmetros, procurou-se definir um conjunto de valores que pudessem ser utilizados em todas as análises, o que está mais de acordo com o que seria de esperar de um modelo de ANLE generalista e apto a ser utilizado na fase de dimensionamento. No domínio dos algoritmos de solução não linear, a adopção de métodos Quasi-Newton, nomeadamente o método BFGS, associados a um algoritmo de Line-Search revelaram-se os mais robustos em todas as situações analisadas.

Dos exemplos estudados, concluiu-se que o modelo numérico seleccionado e calibrado conforme exposto no Capítulo 4, foi capaz de reproduzir uma série de resultados experimentais associados a modos de rotura exigentes do ponto de vista numérico com razoável aproximação, o que permitiu equacionar a sua aplicação em estruturas reais. Note-se, no entanto, que dos três tipos de modelos implementados no programa, apenas um revelou a pretendida versatilidade. Ficou também patente a utilidade da ANLE no auxílio à compreensão do funcionamento de estruturas laminares.

Aplicação prática

No Capítulo 5 foi ilustrada uma aplicação prática da utilização de modelos de análise não linear no processo de dimensionamento de uma estrutura laminar de comportamento complexo. Neste ponto importa evidenciar as diferenças fundamentais entre a utilização destas ferramentas num contexto comercial ou num ambiente associado à investigação, e portanto, num contexto mais académico. Num contexto mais comercial, os resultados das análises são usualmente necessários num prazo de semanas, ou na melhor das hipóteses, de alguns meses. Em geral as análises efectuadas são as estritamente indispensáveis à verificação de segurança, ou esclarecimento do funcionamento, de um pormenor específico. Os atrasos são usualmente inaceitáveis, dado que as análises requeridas podem pertencer ao caminho crítico de um projecto muito mais amplo. O orçamento dedicado à componente analítica do projecto tem de ser competitivo com outras hipóteses passíveis de ser colocadas, tais como um programa de testes ou, simplesmente, a adopção de um coeficiente de segurança maior devido à utilização de abordagens de cálculo mais simples. Destas considerações resulta que o método de cálculo a adoptar será aquele que for, não o mais sofisticado, rigoroso e actual, mas o que for compatível com o prazo e os custos.

A abordagem adoptada no estudo do exemplo do Capítulo 5 pretendeu reflectir um pouco a problemática acima discutida. Apesar das potencialidades do modelo numérico utilizado, demonstradas no Capítulo 4, na fase de dimensionamento ele constitui apenas um compromisso entre a realidade e a simplicidade necessária à sua execução e análise em tempo útil. A utilização de modelos de análise não linear na fase de dimensionamento e verificação de segurança não substitui de forma alguma o julgamento do engenheiro na avaliação das simplificações admissíveis com vista um determinado fim. Isto ficou bem patente nos resultados obtidos da instrumentação durante a primeira fase de enchimento. Ao contrário do sucedido com os resultados laboratoriais verificou-se um afastamento entre as leituras efectuadas e calculadas. Este facto ficou-se a dever essencialmente à consideração de condições fronteira aproximadas, quer pela simplicidade requerida para o modelo, quer pela difícil quantificação das reais condições de apoio de alguns elementos devido a vicissitudes da construção, impossíveis de prever à priori. De qualquer forma, os resultados da instrumentação, conjuntamente com as previsões do modelo numérico, foram de extrema utilidade na interpretação do funcionamento da estrutura tal como construída. Ficaram patentes as potencialidades que um sistema de monitorização integrado pode ter no acompanhamento da vida útil de obras de complexidade acrescida. Esse sistema integrado seria constituído por um sistema sensor e por um modelo numérico devidamente calibrado durante a fase de construção e ensaio de carga.

É também de realçar a importância da modelação por etapas, partindo de modelos simples até chegar aos modelos mais detalhados, de forma a controlar os resultados obtidos. O grau de refinamento a atingir é função das condicionantes acima mencionadas. No exemplo analisado, essa metodologia ficou patente na separação da análise plana, com o objectivo de verificar a segurança em relação a uma possível rotura por corte da parede, da análise tridimensional, necessária para a verificação de segurança dos apoios. Apesar de ser formalmente possível, com o programa utilizado, efectuar uma modelação integrada de toda a parede e respectivos apoios, a metodologia seguida é mais próxima da que pode ser seguida num caso concreto, tendo em vista as limitações de tempo e custo da análise.

Por último, deve ser feita uma menção ao formato de segurança. Tal como foi referido ao longo do Capítulo 5, a actual abordagem semi-probabilística baseada no uso de coeficientes parciais de segurança para as acções e para os materiais não é directamente aplicável no caso de análises não lineares. Por outro lado, o formato de segurança utilizado no exemplo apresentado é muito simples, carece de suporte regulamentar e foi utilizado para evitar a realização de uma análise probabilística mais complexa, dado que a variabilidade que caracteriza as acções e as propriedades dos materiais induz um grau de incerteza na solução estrutural que apenas pode ser correctamente tratada com recurso a métodos estocásticos. Este tipo de análises é consistente mas requer, geralmente, o uso de métodos de simulação, tais como o método do Hipercubo Latino ou o método de Monte-Carlo, obrigando à realização de um número de análises suficiente para que as estimativas das probabilidades de rotura calculadas sejam aceitáveis. Este processo encarece significativamente todo o processo de cálculo e pode constituir um entrave à utilização da ANLE no processo de dimensionamento. Recorde-se que em alguns casos a convergência do processo iterativo de solução é difícil, pelo que a realização de um elevado número de análises pode ser penosa. Um grande desafio que se coloca neste campo, e que uma vez ultrapassado será decisivo para potenciar a utilização da ANLE, é o do estabelecimento de formatos simplificados de segurança, e respectivo enquadramento regulamentar.

6.2 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os desenvolvimentos ao nível da mecânica não linear do betão estrutural e ao nível das respectivas abordagens computacionais constituem ainda um amplo campo de investigação e um excelente desafio à comunidade científica. O trabalho a desenvolver deverá ser sempre orientado no sentido de modelos generalistas, com âmbito de aplicabilidade alargado e não confinado a certos tipos estruturais ou de histórias de carregamento. Um dos principais entraves à utilização dos modelos de ANLE fora do âmbito científico é precisamente o carácter fragmentado e a diversidade de abordagens existentes. Este âmbito de aplicabilidade deverá evoluir no sentido de incluir outros aspectos relevantes do comportamento do betão estrutural,

dos quais se salientam o fenómeno da fadiga, a degradação das características mecânicas com o tempo/acção de agentes agressivos e os efeitos das temperaturas elevadas devidas, por exemplo, à acção do fogo. Por outro lado, a associação de modelos mecânicos com modelos termo-químicos relacionados com a evolução da estrutura do betão, primordialmente nas primeiras idades, apresenta-se hoje como um campo para potenciais desenvolvimentos neste domínio. Os desenvolvimentos nestas áreas serão essenciais na prossecução do objectivo último que é o de construir estruturas simultaneamente cada vez mais seguras, mais duráveis e mais económicas.

O papel da ANLE, devidamente integrada em sistemas de monitorização, na previsão da vida útil das estruturas será certamente de primeiro plano. As vantagens de um sistema desta natureza tem reflexos importantes no nosso conhecimento acerca do comportamento das estruturas tal como construídas, podendo daí ser retiradas importantes conclusões e recomendações para o projecto de novas estruturas, assim como um decréscimo nos custos de manutenção e um aumento da segurança do sistema de infra-estruturas rodoviárias, ferroviárias, entre outras. Este último aspecto poderia inclusivamente vir a reflectir-se num decréscimo dos factores de segurança a adoptar na fase de projecto.

No que se cinge ao processo de dimensionamento, um formato de segurança simples e aplicável à ANLE deverá ser desenvolvido. Para tal deverá ser executado um extenso trabalho de validação de um conjunto seleccionado de modelos contra uma extensa base de dados experimentais credíveis e representativos da maioria dos sistemas estruturais. Este trabalho teria como objectivo a fixação de coeficientes de segurança específicos para a ANLE, e tendencialmente mais baixos do que aqueles actualmente considerados, fazendo uso do maior rigor da análise. Neste campo específico, o desenvolvimento dos modelos deverá prosseguir no sentido de os tornar mas simples e robustos, de modo a minimizar o grau de especialização requerido ao analista.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASHTO. (1994). - *AASHTO LRFD Bridge Specification*, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington.
- ACI. (1998). - "Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the Art." American Concrete Institute.
- ACI. (1999). - "Fracture Mechanics of Concrete: Concepts, Models and Determination of Material Properties." *ACI 446.1R-91*, American Concrete Institute.
- ACI. (2002). - *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI318-02) and Commentary /ACI 318R-02*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan.
- Ahmad, S. H. e Chung, W. (1995). - "Analytical Model for Shear Critical Reinforced-Concrete Members." *Journal of Structural Engineering*, 121(6), 1023-1029.
- Alfaiate, J. M. V. (1992). - "Estudo e Modelação do Comportamento do Betão Fissurado," *Tese de Doutoramento*, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- An, X. e Maekawa, K. (2004). - "Computer aided reinforcement design of RC structures." *Computers and Concrete*, 1(1), 15-30.
- ASCE. (1981). - "State-of-the-art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete." ASCE, New York.
- Ayoub, A. e Filippou, F. C. (1998). - "Nonlinear Finite-Element Analysis of RC Shear Panels and Walls." *Journal of Structural Engineering*, 124(3), 298-308.
- Barros, J. (1995). - "Comportamento do Betão Reforçado com Fibras - Análise Experimental e Modelação Numérica," *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Bazant, Z. P. (1984). - "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock Metal." *Journal of Engineering Mechanics*, 110(4), 518-535.
- Bazant, Z. P. (1985). - "Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures." *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation*, G. C. Sih and A. Tommaso, eds., Martinus Nijhoff Publishers.
- Bazant, Z. P. (1986). - "Mechanics of distributed cracking." *Appl Mech Rev, ASME*, 39(5), 675-705.
- Bazant, Z. P. (1991). - "Why Continuum Damage is Nonlocal: Micromechanics Arguments." *Journal of Engineering Mechanics*, 117(5), 1070-1087.

- Bazant, Z. P. (2001). - "Size Effect on Structural Strength." Handbook of Materials Behaviour Models, J. Lemaitre, ed., Academic Press, San Diego, 30-68.
- Bazant, Z. P., Adley, M. D., Carol, I., Jirasek, M., Akers, S. A., Rohan, B., Cargile, J. D. e Caner, F. C. (2000a). - "Large-Strain Generalization of Microplane Model for Concrete and Application." *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 971-980.
- Bazant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Adley, M. D. e Akers, S. A. (2000b). - "Microplane model M4 for concrete: I. Formulation with work-conjugate deviatoric stresses." *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 944-953.
- Bazant, Z. P. e Gambarova, P. G. (1984). - "Crack Shear in Concrete: Crack Band Microplane Model." *Journal of Structural Engineering*, 110(9), 2015-2035.
- Bazant, Z. P. e Jirasek, M. (2002). - "Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress." *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11), 1119-1149.
- Bazant, Z. P. e Lin, F. B. (1989). - "Nonlocal Smeared Cracking Model for Concrete Fracture." *Journal of Structural Engineering*, 114(11), 2493-2511.
- Bazant, Z. P. e Oh, B. H. (1983). - "Crack band theory for fracture of concrete." *Materials and Structures*, 16(1), 155-177.
- Bazant, Z. P., Xiang, Y., Adley, M. D., Prat, P. C. e Akers, S. A. (1996a). - "Microplane Model for Concrete. II: Data Delocalization and Verification." *Journal of Engineering Mechanics*, 122(3), 255-261.
- Bazant, Z. P., Xiang, Y. e Prat, P. C. (1996b). - "Microplane Model for Concrete. I: Stress-Strain Boundaries and Finite Strain." *Journal of Engineering Mechanics*, 122(3), 245-254.
- Belarbi, A. e Hsu, T. T. C. (1994). - "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete." *ACI Structural Journal*, 91(4), 465-474.
- Belarbi, A. e Hsu, T. T. C. (1995). - "Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression." *ACI Structural Journal*, 92(5), 562-573.
- Belleti, B., Cerioni, R. e Iori, I. (2001). - "Physical Approach for reinforced-Concrete (PARC) Membrane Elements." *Journal of Structural Engineering*, 127(12), 1412-1426.
- Bongers, J. P. W. e Rutten, H. S. (1998). - "Concrete in multiaxial compression - a multilevel analysis." *Heron*, 43(3), 159-180.
- Borst, R. (1987). - "Smeared cracking, plasticity, creep and thermal loading - A unified approach." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62(1), 89-110.
- Borst, R. (1991). - "Computational Methods in Non-Linear Solid Mechanics. Part 2 - Physical Non-Linearity." *TU-Delft report nr. 25-2-91-2-06, TNO-IBBC report nr. BI-91-043*, Delft University of Technology, TNO Institute for Building Materials and Structures, Delft.
- Borst, R. e Nauta, P. (1985). - "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model." *Engineering Computations*, 2, 35-46.

- Bounassard Filho, J. (1995). - "Dimensionamento e Comportamento do Betão Estrutural em Zonas com Descontinuidades," *Dissertação de Doutoramento*, Universidade Técnica de Lisboa. Instituto Superior Técnico., Lisboa.
- Bresler, B. e Scordelis, A. C. (1963). - "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams." *Journal of the American Concrete Institute*, 60(1), 51-72.
- Bujadham, B. e Maekawa, K. (1992a). - "Qualitative Studies on Mechanisms of Stress Transfer Across Cracks in Concrete." *Proc. of the JSCE*, 17, 265-275.
- Bujadham, B. e Maekawa, K. (1992b). - "The Universal Model for Stress Transfer Across Cracks in Concrete." *Proc. of the JSCE*, 17, 277-287.
- Bujadham, B., Mishima, T. e Maekawa, K. (1992). - "Verification of the Universal Stress Transfer Model." *Proc. of the JSCE*, 17, 289-300.
- Cachim, P. (1999). - "Experimental and Numerical Analysis of the Behaviour of Structural Concrete under Fatigue Loading with Applications to Concrete Pavements," *Dissertação de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Caner, F. C. e Bazant, Z. P. (2000). - "Microplane model M4 for concrete: II, Algorithm and Calibration." *Journal of Engineering Mechanics*, 126(9), 954-961.
- Caner, F. C., Bazant, Z. P. e Cervenka, J. (2002). - "Vertex Effect in Strain-Softening Concrete at Rotating Principal Axes." *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1), 24-33.
- Canisius, T. D. G. (2001). - "Concrete excavation for patch repair: Non-linear modelling of propped and unpropped conditions." - *Finite Elements in Civil Engineering Applications*, Tokyo.
- CEB. (1993). - *CEB-FIP Model Code 1990*, Thomas Telford, London.
- CEB. (1996). - "RC elements under cyclic loading. State-of-the-art report." Thomas Telford, London.
- CEN. (2002). - *Eurocode 2: Design of concrete structures. prEN 1992-1-1 (Revised final draft)*, Brussels.
- Cervenka, V. (1985). - "Constitutive Model for Cracked Concrete." *ACI Journal*, 877-882.
- Cervenka, V. (2002). - "Computer Simulation of Failure of Concrete Structures for Practice." - First fib Congress in Osaka, Osaka.
- Cervenka, V., Jendele, L. e Cervenka, J. (2002). - "ATENA Program Documentation Part 1 - Theory." Cervenka Consulting, Prague.
- Chen, W. F. (1982). - *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill.
- Choi, S. e Shah, S. P. (1998). - "Fracture Mechanism in Cement-Based Materials Subjected to Compression." *Journal of Engineering Mechanics*, 124(1), 94-102.
- Crisfield, M. A. e Wills, J. (1989). - "Analysis of R/C Panels Using Different Concrete Models." *Journal of Engineering Mechanics*, 115(3), 578-597.

- CSA. (1994). - *A23.3-94 Design of Concrete Structures*, Canadian Standards Association, Rexdale, Ontario.
- Dahlblom, O. e Ottosen, N. S. (1990). - "Smeared crack analysis using generalized fictitious crack model." *Journal of Engineering Mechanics*, 115(1), 55-76.
- Dalmagioni, P. e Pellegrini. (2001). - "FE guided structural rehabilitation of cooling towers." - *Finite Elements in Civil Engineering Applications*, Tokyo.
- Darwin, D. e Pecknold, D. A. (1977). - "Nonlinear biaxial stress strain law for concrete." *Journal of Engineering Mechanics*, 103.
- Elices, M. e Planas, J. (1989). - "Material Models." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comitee 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 16-66.
- Elwi, A. A. e Murray, D. W. (1979). - "A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship." *Journal of Engineering Mechanics*, 105.
- Faria, R. C. M. (1994). - "Avaliação do Comportamento Sísmico de Barragens de Betão Através de um Modelo de Dano Contínuo," *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Feenstra, P. H. (1993). - "Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete," *Phd Thesis*, Delft University of Technology, Delft.
- Feenstra, P. H., Borst, R. e Rots, J. G. (1991a). - "Numerical Study on Crack Dilatancy. I: Models and Stability Analysis." *Journal of Engineering Mechanics*, 117(4), 733-753.
- Feenstra, P. H., Borst, R. e Rots, J. G. (1991b). - "Numerical Study on Crack Dilatancy. II: Applications." *Journal of Engineering Mechanics*, 117(4), 754-769.
- fib. (1999a). - "fib bulletin 1: Structural Concrete - Textbook on behaviour, design and performance." fib, Lausanne.
- fib. (1999b). - "fib bulletin 2: Structural Concrete - Textbook on behaviour, design and performance." fib, Lausanne.
- fib. (1999c). - "fib bulletin 3: Structural Concrete - Textbook on behaviour, design and performance." fib, Lausanne.
- fib. (2000). - "fib bulletin 10: Bond of reinforcement in concrete - State-of-art report." fib, Lausanne.
- fib. (2004). - "A Practitioner's Guide to Computer-Based Modelling of Structural Concrete (Draft)." fib.
- Figueiras, J. A. (1983). - "Ultimate Load Analysis of Anisotropic and reinforced Concrete Plates and Shells," *Phd Thesis*, University College of Swansea, Swansea.
- Figueiras, J. A. e Pimentel, M. (2004). - "Modelação e dimensionamento de uma ETAR compacta - ETAR de Sobreiras." - 46º Congresso Brasileiro do Concreto, Florianópolis.
- Figueiras, J. A., Pimentel, M. e Lopes, G. (2002). - "ETAR de Sobreiras - Aspectos Especiais do Projecto." - *Betão Estrutural 2002*, Lisboa, 649-660.

- Figueiras, J. A., Póvoas, R. H. C. P., Cachim, P. e Lourenço, P. (1994). - "Sobre o Dimensionamento de Estruturas Laminadas de Betão." - Encontro Nacional de Betão Estrutural 1994, 359-372.
- Foster, S. J. e Marti, P. (2003). - "Cracked Membrane Model: Finite Element Implementation." *Journal of Structural Engineering*, 129(9), 1155-1163.
- Gerstle, K. H., Linse, D., Bertacchi, P., Kotsovos, M. D., Ko, H.-Y., Newman, J. B., Rossi, P., Schickert, G., Taylor, M. A., Traina, L. A., Winkler, H. e Zimmerman, R. M. (1980). - "Behaviour of concrete under multiaxial stress states." *Journal of Engineering Mechanics Division*, 106(6), 1383-1403.
- Ghali, A. e Neville, A. M. (1972). - *Structural Analysis: A unified classical and matrix approach*, Chapman and Hall, London.
- Han, D. J. e Chen, W. F. (1987). - "Constitutive Modelling In Analysis of Concrete Structures." *Journal of Engineering Mechanics*, 113(4), 577-593.
- Hanganu, A. D., Oñate, E. e Barbat, A. H. (2002). - "A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures." *Computers & Structures*, 80, 1667-1687.
- Henriques, A. A. (1998). - "Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento do Betão Estrutural," *Tese de Doutorado*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Hilleborg, A. (1985). - "The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_F of concrete." *Matériaux et Constructions*, 18(106), 291-296.
- Hilleborg, A., Modéer, M. e Petersson, P. E. (1976). - "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements." *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782.
- Hoehler, M. e Ozbolt, J. (2002). - "Application of the microplane model for three-dimensional reversed-cyclic analysis of reinforced concrete members." - *Finite Elements in Civil Engineering Applications*, Tokyo.
- Hordjick, D. A. (1992). - "Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses." *Heron*, 37(1).
- Hordjick, D. A., Van Mier, J. G. M. e Reinhardt, H. W. (1989). - "Material Properties." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comité 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 67-127.
- Hsu, T. T. C. e Zhang, L. (1996). - "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Membrane Elements." *ACI Structural Journal*, 93(1), 108-115.
- Hsu, T. T. C. e Zhu, R. R. H. (2002). - "Softened Membrane Model for Reinforced Concrete Elements in Shear." *ACI Structural Journal*, 99(4), 460-469.
- Hu, H. e Schnonobrich, W. C. (1990). - "Nonlinear Analysis of Cracked Reinforced Concrete." *ACI Structural Journal*, 87(2), 199-207.

- Ingraffea, A. e Saouma, V. (1985). - "Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete." - Engineering Application of Fracture Mechanics.
- Jansen, D. C. e Shah, S. P. (1997). - "Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete." *Journal of Engineering Mechanics*, 123(1), 25-35.
- Jirasek, M. (1998). - "Nonlocal Models for Damage and Fracture: Comparison of Approaches." *International Journal of Solids and Structures*, 35(31), 4133-4145.
- Jirasek, M. (2002a). - "Numerical modeling of strong discontinuities." *Revue française de génie civil*, 6(6), 1133-1146.
- Jirasek, M. (2002b). - "Objective modeling of strain localization." *Revue française de génie civil*, 6(6), 1119-1132.
- Jirasek, M. (2002c). - "Plasticity, Damage and Fracture." Technical University of Catalonia (UPC), Barcelona.
- Jirasek, M. e Bazant, Z. P. (2002). - *Inelastic Analysis of Structures*, Wiley.
- Jirasek, M. e Zimmerman, T. (1998a). - "Analysis of Rotating Crack Model." *Journal of Engineering Mechanics*, 124(8), 842-851.
- Jirasek, M. e Zimmerman, T. (1998b). - "Rotating Crack Model with Transition to Scalar Damage." *Journal of Engineering Mechanics*, 124(3), 277-284.
- Kang, H. D. e Willam, K. (1999). - "Localization Characteristics of Triaxial Concrete Model." *Journal of Engineering Mechanics*, 125(8), 941-950.
- Kaufmann, W. e Marti, P. (1998). - "Structural Concrete: Cracked Membrane Model." *Journal of Structural Engineering*, 124(12), 1467-1475.
- Kotsovos, M. D. e Pavlovic, M. N. (1995). - *Structural Concrete. Finite element analysis for limit-state design.*, Thomas Telford, London.
- Kupfer, H. B. e Gerstle, K. H. (1973). - "Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses." *Journal of Engineering Mechanics Division*, 99(EM4), 853-866.
- Larby, J. A. (1991). - "The cement paste-aggregate interfacial zone in concrete," *Ph.D.*, Delft University of Technology, Delft.
- Li, B., Maekawa, K. e Okamura, H. (1989). - "Contact Density Model for Stress Transfer across Cracks in Concrete." *Journal of the Faculty of Engineering of Tokyo*, XL(1), 9-52.
- Li, Y.-J. e Zimmerman, T. (1998). - "Numerical Evaluation of the Rotating Crack Model." *Computers & Structures*, 68, 487-497.
- Lourenço, P. (1996). - "Computational Strategies for Masonry Structures," *PhD*, Delft University of Technology, Delft.
- Lourenço, P. e Figueiras, J. A. (1993). - "Automatic Design of Reinforcement in Concrete Plates and Shells." *Engineering Computations*, 10(6).
- Maekawa, K., Ishida, T. e Toongoenthong, K. (2004). - "Computational platform for safety and life-cycle assessment of concrete infrastructures." - *Betão Estrutural 2004*, Porto.

- Maekawa, K. e Okamura, H. (1983). - "The Deformational Behavior and Constitutive Equation of Concrete Using the Elasto-Plastic and Fracture Model." *Journal of the Faculty of Engineering of Tokyo*, XXXVII(2).
- Maekawa, K., Pimanmas, A. e Okamura, H. (2003). - *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spoon Press, London.
- Moreira, R. F. e Castro, L. G. (2002). - "Análise e Dimensionamento de Regiões Descontínuas: Estudo de uma Viga-Parede," *Relatório de Seminário de Estruturas I*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Nelissen, L. J. M. (1972). - "Biaxial testing of normal concrete." *Heron*, 18(1).
- Okamura, H. e Maekawa, K. (1991). - *Nonlinear Analysis and Constitutive Models of Reinforced Concrete*, Gihodo-Shuppan Co., Tóquio.
- Owen, D. R. J. e Hinton, E. (1980). - *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea.
- Pijaudier-Cabot, G. e Bazant, Z. P. (1987). - "Nonlocal Damage Theory." *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10), 1512-12533.
- Pimentel, M. e Miranda, J. (2001). - "Análise linear e não linear de estruturas laminares de betão: ETAR de Sobreiras," *Relatório Final de Seminário de Estruturas I*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Póvoas, R. H. C. P. (1991). - "Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo os efeitos diferidos," *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Pramono, E. e Willam, K. (1989). - "Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete." *Journal of Engineering Mechanics*, 115(6), 1183-1204.
- Pruissers, A. F. (1988). - "Theoretical and experimental analysis of the behaviour of cracked concrete under monotonic and cyclic shear loading." *Heron*, 33(4).
- Rashid, Y. R. (1968). - "Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels." *Nuclear Engineering and Design*, 7(4), 334-355.
- Reinhardt, H. W. (1989a). - "Basic Types of Failure." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comitee 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 6-15.
- Reinhardt, H. W. (1989b). - "Joints." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comitee 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 363-368.
- Reinhardt, H. W., Cornelissen, H. W. e Hordjick, D. A. (1986). - "Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete." *Journal of Structural Engineering*, 112(11), 2462-2477.
- Rots, J. G. (1989). - "Bond of Reinforcement." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comitee 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 245-262.

- Rots, J. G. (2002). - "Comparative study of crack models." - Finite Elements in Civil Engineering Applications, 17-29.
- Rots, J. G. e Blaauwendraad, J. (1989). - "Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating." *Heron*, 34(1).
- Rots, J. G. e Borst, R. (1987). - "Analysis of mixed-mode fracture in concrete." *Journal of Engineering Mechanics*, 113(11), 1739-1758.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. e Blaauwendraad, J. (1985). - "Smeared crack approach and fracture localization in concrete." *Heron*, 30(1).
- Santa, U., Bergmeister, K. e Strauss, A. (2004). - "Discussion of stochastic models in structural engineering." - Concrete Structures: the Challenge of Creativity, Avignon.
- Schellenkens, J. C. J. (1990). - "Interface Elements in Finite Element Analysis." *TU-Delft report nr. 25-2-90-5-17, TNO-IBBC report nr. BI-90-165*, Delft University of Technology, TNO Institute for Building Materials and Structures, Delft.
- Schlaich, J., Schafer, K. e Jennewein, M. (1987). - "Toward a Consistent Design of Structural Concrete." *Journal of Prestressed Concrete Institute*, 32(3), 74-150.
- Schlengen, E. (1993). - "Experimental and Numerical Analysis of Fracture Process in Concrete." *Heron*, 38(2).
- Shima, H., Chou, L. e Okamura, H. (1987). - "Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete." *Journal of the Faculty of Engineering of Tokyo*, XXXIX(2), 133-194.
- Soltani, M., An, X. e Maekawa, K. (2003). - "Computational model for post cracking analysis of RC membrane elements based on local stress-strain characteristics." *Engineering Structures*, 25, 993-1007.
- Stevens, N. J., Uzumeri, S. M. e Collins, M. P. (1987). - "Analytical Modelling Of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings." *No. 87-1*, Department of Civil Engineering of the University of Toronto, Toronto.
- Strauss, A., Bergmeister, K. e Santa, U. (2004). - "Reliability based assesment procedure for concrete structures." - Concrete Structures: the Challenge of Creativity, Avignon.
- Tommaso, A. (1989). - "Size Effects and Brittleness." *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Report of the RILEM Comitee 90-FMA, L. Elfgren, ed., Chapman and Hall, London, 191-207.
- Van Geel, H. J. G. M. (1998). - "Concrete in multiaxial compression - experimental research," *Ph.D.*, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- Van Mier, J. G. M. (1984). - "Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions," *Ph.D.*, Delft University of Technology, Delft.
- Van Mier, J. G. M. (1986). - "Fracture of concrete under complex stress." *Heron*, 31(3).
- Van Mier, J. G. M. (1998). - "Special issue on compressive failure of concrete and rock." *Heron*, 43(3), 123-125.

- Vecchio, F. J. (1989). - "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes." *ACI Structural Journal*, 86(1), 23-35.
- Vecchio, F. J. (1990). - "Reinforced Concrete Membrane Element Formulations." *Journal of Structural Engineering*, 116(3), 730-750.
- Vecchio, F. J. (1992). - "Finite Element Modeling of Concrete Expansion and Confinement." *Journal of Structural Engineering*, 118(9), 2390-2406.
- Vecchio, F. J. (1999). - "Towards Cyclic Load Modelling of Reinforced Concrete." *ACI Structural Journal*, 96(2), 193-202.
- Vecchio, F. J. (2000). - "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation." *Journal of Structural Engineering*, 126(9), 1070-1077.
- Vecchio, F. J. (2001a). - "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Implementation." *Journal of Structural Engineering*, 127(1), 12-20.
- Vecchio, F. J. (2001b). - "Non-linear finite element analysis of reinforced concrete: at the crossroads?" *Structural Concrete*, 2(4), 201-212.
- Vecchio, F. J. (2002). - "Contribution of Nonlinear Finite-Element Analysis to Evaluation of Two structural Concrete Failures." *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 16(3), 110-115.
- Vecchio, F. J., Bentz, E. C. e Collins, M. P. (2004). - "Tools for forensic analysis of concrete structures." *Computers and Concrete*, 1(1), 1-14.
- Vecchio, F. J. e Collins, M. P. (1986). - "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear." *ACI Journal*, 83(2), 219-231.
- Vecchio, F. J. e Collins, M. P. (1993). - "Compression Response of Cracked Reinforced Concrete." *Journal of Structural Engineering*, 119(12), 3590-3610.
- Vecchio, F. J. e Selby, R. G. (1991). - "Toward Compression-Field Analysis of Reinforced Concrete Solids." *Journal of Structural Engineering*, 117(6), 1740-1758.
- Vecchio, F. J. e Shim, W. (2004). - "Experimental and Analytical Reexamination of Classical Concrete Beam Tests." *Journal of Structural Engineering*, 130(3), 460-469.
- Vermeer, P. A. e Borst, R. (1984). - "Non-associated plasticity for soils, concrete and rock." *Heron*, 29(3).
- Walraven, J. C. e Reinhardt, H. W. (1981). - "Theory and Experiments on the Mechanical Behaviour of Cracks in Plain and Reinforced Concrete Subjected to Shear Loading." *Heron*, 26(1A).
- Willam, K. (2002). - "Constitutive Models for Engineering Materials." *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Academic Press, 603-633.
- Witte, F. C. e Kikstra, W. P. (2002a). - *DIANA User's Manual release 8.1 - Analysis Procedures*, TNO Building and Construction Research, Delft.
- Witte, F. C. e Kikstra, W. P. (2002b). - *DIANA User's Manual release 8.1 - Material Library*, TNO Building and Construction Research, Delft.

- Wittmann, F. H. (1983). - "Structure of Concrete with respect to crack formation." *Fracture Mechanics of Concrete*, F. H. Wittmann, ed., Elsevier, 43-74.
- Yankelevsky, D. Z. e Reinhardt, H. W. (1989). - "Uniaxial Behaviour of Concrete in Cyclic Tension." *Journal of Structural Engineering*, 115(1), 166-182.
- Zhu, R. R. H., Hsu, T. T. C. e Lee, J.-Y. (2001). - "Rational Shear Modulus for Smeared-Crack Analysis of Reinforced Concrete." *ACI Structural Journal*, 98(4), 443-450.